

GEODÉZIAI KÖZLÖNY

1742

Felelős szerkesztő:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilv. rendes tanár

15

Szerkesztő bizottság:*Allami Földmérést érintő ügyek:***Acs Endre**

műszaki tanácsos,

a Háromszögelő Hivatal főnöke.

Bence Tivadar

áll. főmérnök.

*Kulturális ügyek:***Dr. Hőnyi Ede**

szílv. főmérnök.

*Földreform ügyek:***Kiss Gyula**

min. osztálytanácsos.

*Magánmérnöki ügyek:***Murányi Tamás**

okl. mérnök, magánmérnök,

Jakab Sándor

okl. mérnök, magánmérnök.

*Külföldi lapszemle:***Kürti Vilmos**

műegyetemi intézeti tanár.

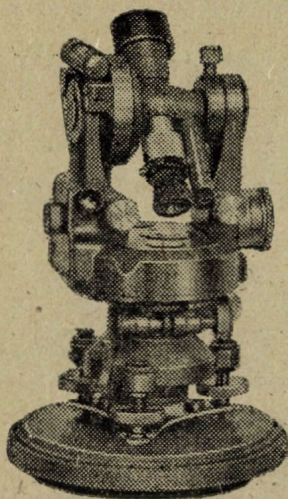
Dr. Homoródi Lajos

áll. főmérnök.

TARTALOM:

| | |
|--|----|
| <i>Murányi Tamás:</i> Beszámoló a Zürichi Műegyetem 5. főiskolai fotogrammetriai tanfolyamáról | 1 |
| <i>Oltay Károly:</i> Hátrametszésszerkesztés | 4 |
| <i>Böröcz Imre:</i> Közelítő eljárás trapéz numerikus osztására | 7 |
| <i>Dr. Tamás Zoltán:</i> Előmentszési koordinátaszámítás algebrai értékekkel, különös tekintettel az ellenőrzésre | 18 |
| <i>Szemle. (Kürti Vilmos)</i> | 29 |

P. 2212,
3814,**Előfizetési ára: egész évre 72 forint, (havonta 6 forint).****A szerkesztőség címe:****Budapest, XI., Műegyetem. — Postatakarékpénztári csekk számla: 45.223.**



WILD
HEERBRUGG

T. O. jelű busszolás teodolit

Könnyen kezelhető korszerű műszer. Vízszintes köre mint tájoló, vagy mint rögzített kör is használható. Leolvasása a WILD-féle koincidenclás módszerrel és mikrométer-csavarral 1'. A távcső nagyítása 16X

Igen ajánlható erdészeti célokra,
valamint sokszögelésre.

Részletes Ismertetőt és árajánlatot készséggel küld
a képviselőt:

FINOMMECHANIKAI GYÁRTMÁNYOKAT ÁRUSÍTÓ K. F. T.

Székház: BUDAPEST, IX., KÖZRAKTÁR-UTCA 20/A.

Telefon: 180—873*

Fiók: IV., APPONYI-TÉR 1., Telefon: 188—226.

OSZK
KÖNYVELOSZTÓ
FŐLŐPÉLDÁNY

GEODÉZIAI KÖZLÖNY

Felelős szerkesztő:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilv. rendes tanár.

Előfizetési ára: egész évre 72 forint (havonta 6 forint).

Szerkesztőség: Bpest, XI., Műegyetem. — Postatakarékpénztári csekk számla száma: 45.223.

Beszámoló a Zürichi Műegyetem 5. főiskolai fotogrammetriai tanfolyamáról.

Murányi Tamás.

Többévi háborús kényszerszünet után 1948 március és áprilisában rendezte meg a Zürichi Műegyetem fotogrammetriai intézete 5. főiskolai tanfolyamát. A kéthónapos kurzus rendkívül nagy látogatottságnak örvendett, mert azon 12 európai és 6 tengerentúli állam 52 mérnöke vett részt. Figyelemreméltó körülményként kell megemlítenem, hogy a kelet- és közép-európai kiküldöttek, Lengyelország, Bulgária, Jugoszlávia és Csehszlovákia a résztvevők mintegy 50%-át tették ki. Magyarországról egyedül én vettem részt a tanfolyamon. A szeptemberben Hágában megrendezett 10 napos nemzetközi fotogrammetriai kongresszus mellett ez a zürichi tanfolyam volt méreteiben és időtartamában az uőbbi évek legnagyobb arányú nemzetközi fotogrammetriai összejövele.

Alkalmam volt közvetlen és széleskörű információkat szerezni arra vonatkozóan, hogy a világ gazdasági erői mely irányt és mekkora méreteket szabnak jelenleg a fotogrammetria gyakorlati alkalmazásának. Legnagyobb érdeklődés ma is még a topográfiai felvételek felé irányul. Ez természetes is, ha meggondoljuk, hogy a repülési technika második világháború alatti és utáni szinte minden képzeletet felülmúló fejlődése elsősorban a gazdaságilag még ki nem aknázott Európán kívüli földrészek egészen nagyarányú légi fotogrammetriai felvételeinek lehetőségét teremtetle meg.

Ezeknek a felvételeknek céljai egészen különbözőek. Míg pl. Argentína esetében a nagyobbára már pacifikált állam mezőgazdaság- és iparfejlesztési programját szolgálja a felmérés, addig Ausztrália és főleg Brazília a technikai civilizáció első pozitív pionírjaként küldi a repülőgépet és mérőkamrát Melbourne-től Darwinig a Nagy Homok-sivatagokon keresztül éppen úgy, mint a Brazil Hegyvidék és az Amazonas rengetegei fölé. Ezek a kormányok nagy erőfeszítéseket tesznek, hogy a vékony civilizált tengerparti sávról a népesség fejlődésének és terjeszkedésének irányát a kontinens belseje felé tereljék. Így a felvételek, topográfiai térképek nyomán út- és vasúttervek, vízerőtelepek, bányá- és ipartelepek tervei készülnek.

Dél- és Középfrika trópusai felett a kamara lencséje nemesfém, urániumlelőhelyet kutat és a világpolitika nagy kísértője, az olaj, Középkelettől Hollandíndiáig a fotogrammetriát alkalmazza geológiai kutatásokra.

E nagykiterjedésű fotogrammetriai feladatok a szakemberek érdeklődésének előterébe helyezték a légi háromszögelés problémáját. Az aerotrianguláció nem új és főleg nem ismeretlen olvasóim előtt. Meglepő azonban, hogy nagyfokú érdeklődés és a hozzáfűződő nagy gazdasági érdekek ellenére ennek az eljárásnak kiforrott általánosan alkalmazott módszereiről még ma sem lehet beszélni. A feladatok méreteihez képest főleg tengeren túlon kevés a szakember, aminek következményeként lépten-nyomon értesültem délafrikai és latin-amerikai légi háromszögelések komoly műszaki hiányosságairól. A második világháború következtében megszakadt nemzetközi együttműködés hátrányai erősen megmutatkoznak az eljárások különbözőségeiben és az elért eredményekben egyaránt. Legnagyobb tapasztalatokkal e téren a hollandok és svájciak rendelkeznek. Mint elfogadható gyakorlati eredményt biztosító maximális I. rendű repülési sávot 100 km hosszban jelelhetjük meg. Ezen repülési sávok kettős sávként való háromszögeléséből nyert pontok vízszintes középhibái 12—15 m, magassági középhibái pedig 5—6 m között váltakoznak.

A repülési magasság általában 5—6000 m között váltakozik. A múlt évi hágai nemzetközi konferenciára prof. Dr. Baeschlin elnöklete alatt működő III. komissio az utóbbi évek égi háromszögelési eredményeit, módszereit, az alkalmazott géptípusokat és kiértékelő műszereket részletesen feldolgozta.

Ezeknek a feladatoknak méreteit jellemzi, hogy a program közelebbről oly nagy kiterjedésű területeket érint, mint az európai kontinens — európai Oroszországot is beleértve — ötszöröse.

Az alkalmazás kiterjedésében lényegesen kisebb, de jelentőségében és eredményeiben az előzőekben vázolt felméréseknél sokkalta nagyobb az a fejlődés, mely a nagyléptékű térképek fotogrammetriai szerkesztésében és alkalmazásában mutatkozik.

Ezen a téren mind műszaki eredményekben, mind a felmért területek kiterjedésében jelenleg Svájc az első.

Közel 60 év telt el azóta, amióta Sigriswil község felmérésénél a földi fotogrammetriai eljárást kísérletképen először alkalmazták és 1925-ben fejezte be Bosshardt St. Gallen környékén a légi fotogrammetriai próbaméréseket. Az itt szerzett tapasztalatok alapján a légi fotogrammetriai kataszteri felmérés 1927-ben előre megszabott program szerint, rendszeresített felmérési eljárásaként indult meg és első szakasza 1935-ben évi átlagban 40.000 hektár területen összesen 320.000 hektáron fejeződött be. Ezzel a svájci polgári törvénynek 1912-ben hozott az a rendelkezése, mely a kiterjedt Alpok, legelők, erdőségek kataszteri felmérését a Magas- és Előalpokra is előírta — egy az érintett földterületek értékével arányban álló mérési eljárással, — a megvalósulás útjára lépett. Egyidejűleg realitássá vált a svájci felmérési utasításnak 1910-ben szerkesztett az a szakasza, mely a fotogrammetriát, ha bizonyos megkötöttség mellett is, de egyenértékű mérési eljárásnak irányozta elő.

Kedvező műszaki és pénzügyi eredmények következtében már 1936-ban nagyszabású programot dolgoztak ki nagyléptékű fotogrammetriai térképek készítésére, mely felvételek 2,000.000 hektáron, Svájc egész területének mintegy 50%-ára terjedtek ki. Ez a program 1 millió hektáron a felmérést kataszteri célokra, továbbá 1:5000 és 1:10.000 méretarányú magassági átnézeti térképek készítése céljából irányozta elő, míg 1 millió hektár felmérése az átnézeti térképek szerkesztése mellett 1:2000 és 1:5000 méretarányú kultúrhatár térképezését célozta.

A fotogrammetria műszereinek és eljárási módszereinek fejlődése azonban e program kiterjesztését tette lehetővé.

Míg 1936-ban olyan területek felmérését, amelyen a birtok elaprózottság foka nagy volt, nem tartották műszakilag és főleg pénzügyileg kivihetőnek. 1940-ben, tehát 4 évvel később, azonban már Tessin környékén tagosításokkal kapcsolatos birtokállapot felvételekre kezdik alkalmazni a légi fotogrammetriát.

Az eredmények műszaki és pénzügyi vonalon már a második világháború alatt annyira javultak, hogy ma már ez az eljárás kizárólagosan kerül alkalmazásra tagosításoknál, talajjavítási, öntözési munkálatoknál, függetlenül a domborzati viszonyoktól.

Amíg a 30-as években a fotogrammetria csupán az alpesi vidék szinte megközelíthetetlen területeinek felmérésére volt alkalmazható, a fejlődés és főleg munkatervezés következtében 10 év alatt egyre újabb és újabb területek és feladatok kapcsolódhattak be a fotogrammetriai programba.

A legújabb ellenőrzött, hivatalos adateredmények arról számolnak be, hogy az 1:1000 méretarányú térképek szerkesztésénél 1500 m repülési magasság mellett az egyes pontok relatív helyzetének meghatározási vízszintes középhibája 14—20 cm között mozog.

A fotogrammetriai kataszteri felmérés technikai végrehajtását 1948 novemberében a Mérnökszakszervezetben tartott előadásomban vázlatosan alkalmam volt ismertetni.

Most röviden csak azokra a tényezőkre szeretnék rámutatni, melyek svájci vélemény szerint is e kiváló eredmények elérését elősegítették, illetve lehetővé tették. A fotogrammetriai műszerek technikai fejlődése ugyanis 1938—48 között korántsem volt oly nagy mértékű, hogy az elért eredményeket és ezzel párhuzamosan az alkalmazás lehetőségeiben elért fejlődést döntően befolyásolták volna. A jó műszerek önmagukban e műszaki célok elérésére nem elégségesek.

Az elért nagy teljesítmények és eredmények elérése érdekében első-sorban nagyszámú szakember kiképzése és tudományos, valamint gyakorlati fejlődésük biztosítása volt szükséges. Ezért az első komoly feladat, melyet a svájciak megoldottak, a mérnökképzés volt. A zürichi műegyetem geodéziai intézete és annak professzora, dr. Baeschlin, majd prof. Zeller minden anyagi támogatást megkaptak, hogy a fotogrammetria tudományát gyakorlati irányban is fejleszthessék. A geodéziai intézet mellett felállított fotogrammetriai intézet a svájci egyetemi hallgatóknak megadja a lehetőséget az egyetemi évek alatti alapos kiképzésre.

A következő lépés a svájci felmérési igazgatóság repülő- és fényképező szolgálatának megszervezése volt. Ezzel a katonai térképészeti

intézetet egyrészt tehermentesítették, másrészt a mérnöktársadalom újabb szektorát kapcsolták be a fotogrammetriai munkakörbe. E szolgálat felállítása által lehetővé vált, hogy a kataszteri felmérési szolgálat megszervezését, a program kidolgozását és végrehajtását elsődleges feladatként saját hatáskörben oldhassa meg az igazgatóság, amiáltal a zavartalan és szisztematikus munka mint a szakszerűség első feltétele biztosítva volt.

A felmérési munkálatokba szervezeten kapcsolódik be a földmérő mérnöki kar, mely a birtokrendezési és birtokelhatárolási munkálatokat végzi el, továbbá a fotogrammetriai irodák, melyek feladata a felvételek kiértékelése és a térkép megszerkesztése.

Különös súlyt helyeztek az első tapasztalatok után, hogy a repülési és fényképezési szolgálat szakszerűen legyen előkészítve és elvégezve, mert ez a munka biztosítja elsősorban a megkívánt műszaki eredményeket. Ezért a pilóta és megfigyelő közvetlenül a felmérési igazgatósághoz van beosztva, éppen úgy, mint a repülőgép és tartalékgép.

A fotogrammetriai munkák kisebb egységei is nagy területeket ölelnek fel, minimálisan 10.000 hektárra terjednek ki. A munka különböző fázisainak, így jóelőre megszervezett program többek között a költségek biztosítása végett, birtokrendezési és birtokelhatárolási munkák, szignalizálás, repülőszolgálat és felvétel, azonosítás és fix pont meghatározás, kiértékelés és a tervek kidolgozása szervezeten és időbeli kiesés nélkül kell, hogy egymásba kapcsolódjanak, mert csak így biztosítható a műszaki követelmények mellett a gazdaságos végrehajtás.

Én hiszem, hogy a Magyar Fotogrammetriai Társaság munkájának újbóli megindulása a körültekintő előkészítő munka megindítását is fogja jelenteni, hogy amint az anyagi lehetőségeink megnyílnak, a cél tudatos és szakszerű munka ezen a vonalon is széles körben haladéktalanul megindulhasson.

Hátrametszésszerkesztés.

Oltay Károly.

A Geodéziai Közlöny 1947. évi 5.—6. számában közöltek kiegészítéseképpen még egy szerkesztési eljárást ismertethetek, azt, amelyet dr. Hänert a *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1923. évi 52. kötetében (168. és 169. oldal) tett közzé.

A Hänert-féle szerkesztés a következő:

A CA egyenesre (1. ábra) felrakjuk a \overline{BC} hosszat, azaz

$$\overline{CI} = \overline{BC}.$$

Az így nyert pontból átmetszük a BC egyenest az AC sugarú körrel, azaz

$$\overline{2I} = \overline{AC}.$$

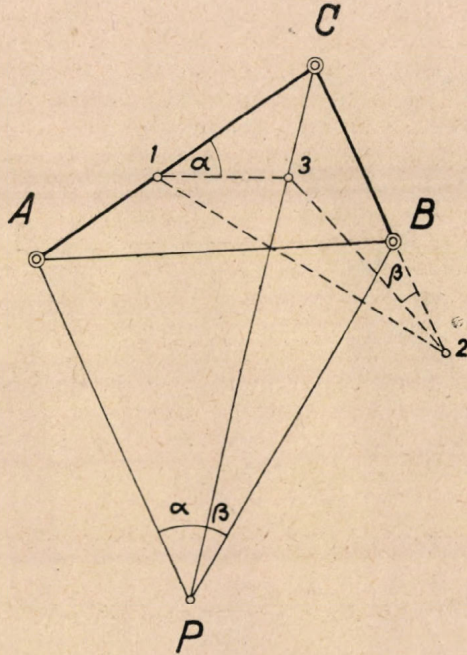
Az $I2C$ háromszög tehát szimmetriás fekvésű a BCA háromszöghöz. A szimmetria tengelye a BCA szög felező vonala.

Most felrakjuk az 1. pontból az α szöget, a 2. pontból a β szöget az 1. ábrának megfelelő módon.

Az így nyert 3 pont rajta van a \overline{CP} egyenesen.

Ha tehát a 3 pontot összekötjük a C ponttal, akkor CP egyenes tetszőleges pontjában felrakva az α és β szögeket s a szabad szárakkal párhuzamost húzva a B és az A pontokból, ezek egymást a P pontban metszik.

A szerkesztésnek megfelelő számítás az 1 és a 2 pontok koordinátáinak kiszámítása után két (ellenőrzéssel három) előmetszés megoldásából áll.



1. ábra.

Ebből az alkalomból nem lesz felesleges megemlékezni a fenti eljárás alapjául szolgáló Friedrich-féle hátrametszés-megoldásról, amely elméleti szempontból különös figyelmet igényel. (Dr. Franz Müller, Neue Lösung des ebenen Rückwärtseinschneidens nach der Friedrichschen Vektormethode. Zeitschrift für Vermessungswesen 1922, 685—687. oldal).

Friedrich igazolta azt, hogy a A-ban felrakott β szög (2. ábra) és a B-ben felrakott α szög szabad szárai olyan F pontban metszik egymást, amelynek távolsága a C ponttól (CF) negyedik arányosa a AC, BC és CF hosszaknak, azaz

$$\overline{PC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{CF}}$$

Evvel a feladat matematikai úton már megoldottnak tekinthető, mert ha

PC ismeretes, akkor az ACP és BCP háromszögek teljesen meg vannak határozva, tehát az AP és BP távolság is kiszámítható.

A Friedrich-féle számítás a következő lépésekből áll:

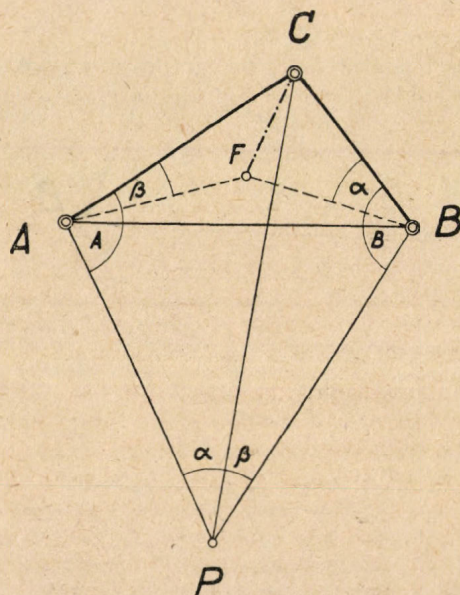
1. Az A, C, B koordinátaiból és az α és β szögekből kiszámítjuk előmetszéssel az F koordinátáit.

2. Kiszámítjuk a \overline{CF} -et.

3. Kiszámítjuk PC -t.

4. Kiszámítjuk a $\sin A$ -t és $\sin B$ -t

$$\sin A = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} \sin \alpha, \quad \sin B = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} \sin \beta$$



2. ábra.

5. Az ACP háromszögből és ellenőrzésül a BCP háromszögből is, előmetszés-számítással megállapíthatjuk a P pont koordinátáit.

* * *

A \overline{PC} távolsághoz hasonlóan számítható a \overline{PA} és a \overline{PB} távolság is. Nevezetesen

$$PA = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{FB}}{CF}$$

$$PB = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{FA}}{CF}$$

* * *

A Friedrich-féle megoldás az egy segédpontos megoldások közé tartozik és egyaránt alkalmas logaritmuskönyvvél, illetve számológéppel való megoldásra.

Közelítő eljárás trapéz numerikus osztására.

Böröcz Imre.

Trapézalakú terület numerikus osztására jól bevált pontos képleteket ismerünk. Ezek egyrésze az előírt területek kimetszéséhez szükséges adatokat egy közvetlenül felírható képlet megoldásaképpen adja. Például az 1. ábrán vázolt trapéz osztásánál a $T_1, T_2 \dots T_k$ területeket az $a_1, a_2 \dots a_k$ hosszak határozzák meg és a számítás közvetlenül ezeknek az értékeknek a meghatározására irányul. Fenti képletek alkalmazása azonban nehézkessé válik, ha a trapéz nagyon kevésbé tér el a parallelogrammától. A képletek levezetésének alapelve ugyanis a trapéznek háromszöggé való kiegészítése, ennek a háromszögnek a magassága pedig végtelenhez tart, ha a trapéz parallelogrammába megy át. A képletek megoldása egyébként négyzetgyökvonást is igényel és a végeredmény különbség formájában mutatkozik, ahol a különbség tagjai az említett trapézoknál külön-külön a végtelenhez tartanak, miközben a különbség határértéke a keresett hossz lesz. Ilyen körülmények között elképzelhető, hogy ha a különbségben bizonyos pontosságot kívánunk elérni, úgy a különbség tagjaiban néha 8—10 tizedes pontosság sem bizonyul elegendőnek, ami különös tekintettel a végzendő négyzetgyökvonásra, a számítást rendkívül hosszadalmassá és nehézkessé teszi. Fenti nehézségek lényegének részletesebb megvilágítására egyébként a későbbi levezetések során még visszatérek.

Más úton érhetünk célhoz a Naszluhác-féle képletek alkalmazásával. E képletek egyike az 1. ábrán vázolt trapéz előírt területeinek levezetésére szerkesztett határvonalak hosszát, azaz az $m', m'', \dots m^k$ hosszakat adja, míg ezek ismeretében egy második képlettel számíthatók a keresett $a_1, a_2 \dots a_k$ értékek. A képlet egyaránt jól alkalmazható bármely trapéznál, az első képlet megoldása mindenesetre itt is négyzetgyökvonást igényel, nagyszámú terület levezetésénél pedig, például házhelyosztásnál, a számítás hosszadalmassá válik.

Alábbiakban a feladat megoldására új módszert ismertetek, mely annál gyorsabb közelítéssel adja a kívánt eredményt, minél közelebb áll a vizsgált trapéz a parallelogrammához. Használata addig okszerű, amíg a párhuzamos oldalak aránya nagyobb, mint 0.7—0.9. A módszer előnye *egyenlő területek* kimetszésénél domborodik ki, különböző területeknél különösebb munkamegtakarítás nem érhető el.

Legyen adva az 1. ábrán vázolt trapéz a következő adatokkal: m_0, m_1, a_n .

Az adatokból számítható a trapéz területe:

$$\sum_{i=1}^n T_i = \frac{m_0 + m_1}{2} a_n$$

és a következő mennyiség:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{m_0 - m_1}{a_n}$$

A trapézt n részre kívánjuk osztani, s e részek területe egymásután legyen:

$$T_1, T_2, \dots T_k \dots T_n.$$

Keressük e területek kimetszéséhez szükséges

$a_1, a_2, \dots a_k \dots a_{n-1}$ távolságokat.

A közbenső a_k távolság meghatározásához felírható:

$$m_0 a_k = \sum_{i=1}^k T_i + \frac{a_k^2}{2} (tg \alpha + tg \beta)$$

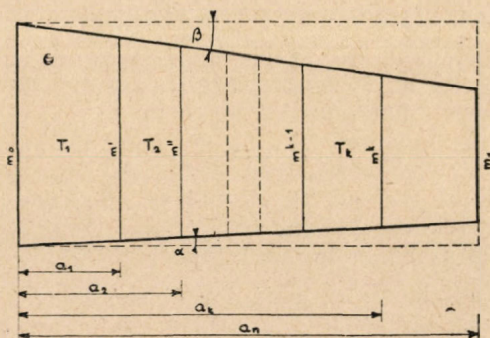
vagy m_0 -sal végigosztva és bevezetve az

$$\frac{1}{m_0} = A \quad \text{és} \quad \frac{1}{2 m_0} (tg \alpha + tg \beta) = B \quad 1.$$

jelöléseket

$$a_k = A \sum_{i=1}^k T_i + B a_k^2 \quad 2.$$

képlet nyerhető.



1. ábra.

Minthogy a trapéz feltételünk értelmében közel áll a parallelogrammához, a képletben szereplő B érték kicsi. Így a négyzetes tag elhanyagolásával számítjuk a_k első közelítő értékét, majd ennek felhasználásával — most már a második tagot is figyelembevéve — a_k -nak pontosabb közelítő értékét és így tovább. Nem szorul igazolásra, hogy adott esetben a_k értékére kapott sorozat összetartó és határértéke a keresett távolság lesz, továbbá, hogy az összetartás annál gyorsabb, minél kisebb a B érték, azaz minél jobban közelíti meg a trapéz a parallelogrammát.

A számítás célszerűen a táblázatban látható séma szerint végezhető. Az egymásutáni vízszintes sorokban számítjuk az $a_1, a_2 \dots a_k \dots$ távol-

ságokat, egymásután írva az egyes közelítéseket, amíg az egyes közelítések közötti eltérések előírtan csekélyek nem lesznek.

A számításhoz célszerű olyan számológép alkalmazása, melynél az eredmény sorból az eredmény közvetlenül beállítható. (U. n. feldobós.) A közelítő a_k érték beállítása után azt önmagával szorozzuk, az eredményt feldobva B -vel szorzunk, majd beállítva a területet, azt A -val beforgatjuk, mire a következő a_k jelenik meg az eredmény sorban. Ezt leírjuk és feldobva az eljárás ismételtető.

*

Fenti számítások végzésénél az első területeknél az összetartás elég gyors, de az utolsóaknál már számottevően romlik, annyira, hogy az ismertetett esetekben a módszer alkalmazása nem rentabilis. Más a helyzet azonban, ha a kimetszendő területek egyenlő nagyságúak, mely esetben — mint már bevezetőben említettem — a számítás nagyon gyorsá válik.

Ez esetben ugyanis

$$\sum_{i=1}^k T_i = k T$$

ha T -vel jelöljük az egyenlő nagyságú kimetszendő területeket.

Az 1.) alatti jelölésekből az első helyett

$$\frac{T}{m_0} = C$$

jelölést bevezetve és a másodikat megtartva, az

$$a_k = k C + B a_k^2 \quad 3.$$

képletet nyerjük. Ez lényegében a 2.) képlettel azonos, a számítás be rendezésénél figyelembe vesszük azonban azt a tényt, hogy a trapézból kimetszett egyenlő területek szélessége (az egymásután következő „ a ” értékek különbsége) monoton növekszik. Sőt — mint később igazolni fogjuk — e szélességek különbsége is, majd e különbségek különbsége és így tovább, mind monoton növekvő sorozatot képeznek. Egyben a sorozat elemei egy bizonyos határig az előző sorozat elemeihez képest csökkenést mutatnak, sőt gyakorlatilag gyakran el is tűnnek.

Ennek a megállapításnak a felhasználásával a számítás a táblázatban vázolt sémán a következőképpen végezhető. Mint előbb, a négyzetes tag elhanyagolásával számítjuk a_1 első közelítő értékét. Ebből a szokott módon a végleges a_1 értéket. Ez egyúttal az első parcella szélessége, tehát az I-rendű különbség első rovatába is beírjuk. Most ennek az értéknek a kétszeresével kísérletezünk a_2 első közelítőként. Szokott módon nyerjük a_2 végleges értékét. a_2 és a_1 különbsége, mely tulajdonképpen a második parcella szélessége, az I-rendű különbségek második rovatába kerül. A már kiszámított két elsőrendű különbségnek a különbsége ke-

rül a II-rendű különbségek oszlopának első rovatába. Ez az érték azt mutatja, mennyivel szélesebb a második parcella az elsőnél. Következik a_3 számítása: feltételezzük, hogy a harmadik parcella ugyanannyival szélesebb a másodiknál, mint amennyivel a második szélesebb az elsőnél, tehát a_2 véglegesen megállapított értékéhez hozzáadjuk az I. és a II-rendű különbségek oszlopokban legalul szereplő értékeket. Ezzel a közelítővel indulunk a_3 végleges értékének megállapítására, majd ennek ismeretében I., II. és III-rendű különbségeket nyerünk. Ezt a módszert folytatjuk az összes „ a ” érték ismeretéig. Sok esetben a IV-rendű különbségek, néha pedig már a III-rendűek gyakorlatilag zérus értékűek. Ez esetben az „ a ” értékekre levezetett első közelítők már eleve egyeznek a végleges értékekkel, az iterációs művelet végrehajtása jóformán csak kontroll-jellegű.

A számítás menete számológéppel a következő: Meghatározandó a_k értéke, beállítjuk tehát a_{k-1} végleges értékét, majd az eredmény-sorba leforgatás után hozzáadjuk az I., II., III. és IV-rendű különbségek oszlopokban alul lévő értékeket és az összeget felvisszük a beállító-sorba. Ez az érték a_k első közelítője. Önmagával szorozzuk, majd fel-dobva szorozzuk B -vel, a szorzatot az eredmény-sorban hagyva beállítjuk C -t és k -szor hozzáadjuk. (k egész szám.) Az eredmény-sorban a_k második közelítője van. Ha az első közelítőtől való eltérés nagyobb a megkívánt pontosságnál, úgy az eljárás a második közelítő feldobá-sával ismétlendő.

*

A számítás menetét és a konvergencia mértékét számpéldák kidol-gozásával mutatjuk be.

A számpéldákat úgy választjuk meg, hogy minden — a gyakorlat-ban előforduló — esetre megállapítható legyen az összetartás mértéke. Idézzük ezért a 3.) képletet:

$$a_k = kC + B a_k^2$$

ahol

$$C = \frac{T}{m_0}; B = \frac{tg \alpha + tg \beta}{2 m_0} \quad \text{és} \quad tg \alpha + tg \beta = \frac{m_0 - m_1}{a_n}$$

Ezek helyettesítésével tehát:

$$a_k = k \frac{T}{m_0} + \frac{m_0 - m_1}{2 m_0 a_n} a_k^2 = k \frac{T}{m_0} + \frac{1}{2 a_n} \left(1 - \frac{m_1}{m_0} \right) a_k^2$$

A számítás konvergenciája tehát a T , m_0 , m_1 és a_n értékektől függ. A négy változó háromra csökkenthető, ha változóknak a

$$\frac{T}{m_0}, \quad a_n \quad \text{és} \quad \frac{m_1}{m_0}$$

értékeket tekintjük.

A három változótól függ az összetartás gyors vagy kevésbé gyors

volta. Minden lehetséges eset megvizsgálása nagyon hosszadalmas lenne, ezért választunk egy alaptípust (1. példa) és ennek konvergenciáját hasonlítjuk össze a többi példával, melyekben a három változó közül mindig másikat változtattunk.

Az alaptípus adatai legyenek:

$$\begin{array}{ll} a_n = 142 \text{ méter,} & a_n = 142 \text{ méter} \\ m_0 = 50 & \text{Ezekből: } \frac{T}{m_0} = 12 \\ m_1 = 45 & \\ T = 600 \text{ m}^2 & \frac{m_1}{m_0} = 0.9 \end{array}$$

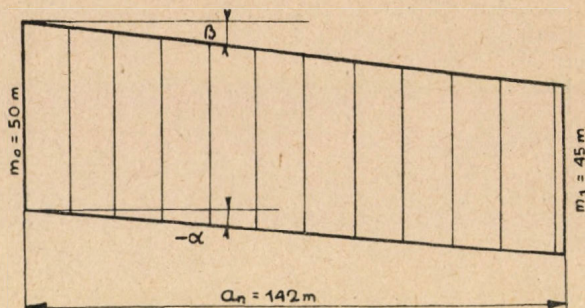
A példa kidolgozásának szemléletéből megállapítható, hogy a számítás gyors, hiszen a III-rendű különbség már csak 3–4 mm nagyságú és így az I. közelítő a negyedik területtől kezdve majdnem milliméterre egyezik a végleges értékkel.

A konvergenciára legnagyobb befolyása az $\frac{m_1}{m_0}$ viszonynak van. A 2. és 3. példában megtartottuk az alaptípus adatait, csupán az m_1 értéket választottuk úgy, hogy az $\frac{m_1}{m_0}$ viszony 0.7, illetve 0.8 értékű legyen. Látható, hogy ennek a változtatásnak a hatása abban nyilvánul, hogy csak a IV-rendű, illetve csak az V-rendű különbség válik 2–3 mm-es elhanyagolható értékűvé. A különbségek rendszertelensége annak tulajdonítható, hogy a végleges értékek csak milliméterre vannak megadva és az elhanyagolt tizedmilliméterek a különbségek képzése során felnövekszenek.

A 4. példában visszatértünk a párhuzamos oldalak 0.9 értékű viszonyára, viszont kétszeres T területeket metszünk le. Ezzel a $\frac{T}{m_0}$ változó kétszeresére növekszik. Ez a felvétel ismét egy rendszámmal tovább, a IV-rendű különbségek oszlopába viszi a 3–4 mm-es értéket, tehát a konvergenciát rontja.

Az 5. példában az 1. példa adatait tartottuk meg azzal az eltéréssel, hogy a trapéz minden lineáris méretét erős nagyítással 100-szoros értékűre vettük fel. A kimetszendő területet szintén arányosan 10.000-szeres értékűnek választottuk. Az ennél a példánál meghatározott eredmények természetesen egyeznek a 4. példa eredményeivel, csupán két tizedes értékkel nagyobb pontosságúak. Látható a konvergencia romlása, bár nem erős mértékben, mert hiszen 14 km hosszú trapéznál, tehát 100-szoros lineáris nagyításban is aránylag gyorsan milliméter pontosságú eredményhez juthatunk.

$$\frac{m_1}{m_0} = 0.9$$



$$T = 600 \text{ m}^2$$

$$C = 12 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 0.0352113$$

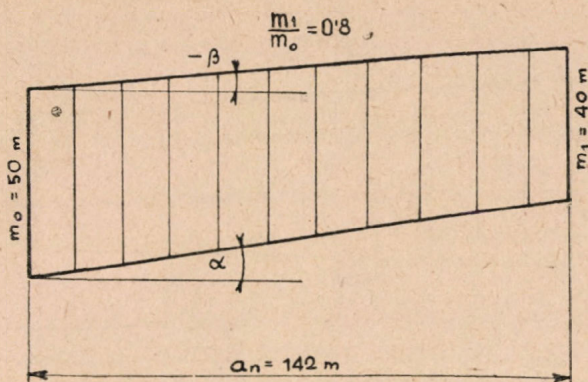
$$B = 0.000352113 \text{ m}^{-1}$$

$$a_k = k C + B a_k^2$$

| Különbségek | | | | | Sorszám | Közelítők | | | Végleges eredmény |
|-------------|-----|-------|-------|---------|---------|-----------|--------|--------|-------------------|
| V. | IV. | III. | II. | I-rendű | | 1. | 2. | 3. | |
| — | — | 0.003 | 0.104 | 12.051 | 1 | 12.000 | 12.051 | —→ | 12.051 |
| — | — | 0.003 | 0.107 | 12.155 | 2 | 24.102 | 24.204 | 24.206 | 24.206 |
| — | — | 0.002 | 0.110 | 12.262 | 3 | 36.465 | 36.468 | —→ | 36.468 |
| — | — | 0.004 | 0.112 | 12.372 | 4 | 48.840 | — | —→ | 48.840 |
| — | — | 0.003 | 0.116 | 12.484 | 5 | 61.325 | — | —→ | 61.324 |
| — | — | 0.004 | 0.119 | 12.600 | 6 | 73.922 | — | —→ | 73.924 |
| — | — | 0.003 | 0.123 | 12.719 | 7 | 86.644 | — | —→ | 86.643 |
| | — | 0.003 | 0.126 | 12.842 | 8 | 99.484 | — | —→ | 99.485 |
| | | | 0.129 | 12.968 | 9 | 112.454 | — | —→ | 112.453 |
| | | | | 13.097 | 10 | 125.550 | — | —→ | 125.550 |
| | | | | | 11 | 138.779 | — | —→ | 138.781 |
| | | | | | 12 | | | | |

Az öt példa eredményeiből a következő következtetés vonható le.

Az első példában az oldalviszony 0.9, a parcellák száma közelítőleg tíz. A III-rendű különbségek 3—4 mm nagyságúak. Az oldalviszonynak 0.1 értékkel való csökkentése, vagy a parcellák számának felezése, vagy kétszerezése mintegy 1—1 rendszámmal nagyobb- vagy kisebb-rendű különbséggel való számolást igényel. A lineáris nagyítás vagy



$$T = 600 \text{ m}^2 \quad C = 12 \text{ m}$$

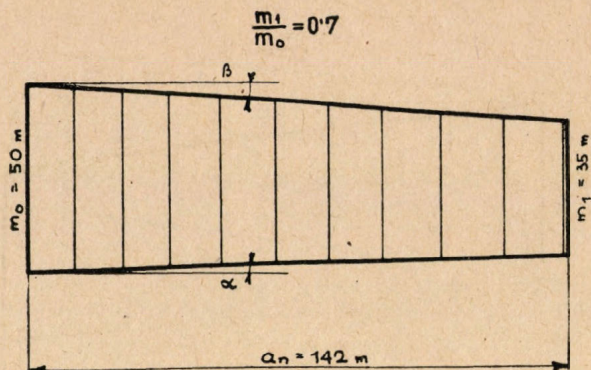
$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 0.0704226 \quad B = 0.000704226 \text{ m}^{-1}$$

$$a_k = k C + B a_k^2$$

| Különbségek | | | | | Sorszám | Közelítők | | | Végleges eredmény |
|-------------|-------|-------|-------|---------|---------|-----------|--------|--------|----------------------|
| V. | IV. | III. | II. | I-rendű | | 1. | 2. | 3. | |
| — | 0.002 | 0.011 | 0.214 | 12.103 | 1 | 12.000 | 12.101 | 12.103 | 12.103 |
| — | 0.002 | 0.013 | 0.225 | 12.317 | 2 | 24.206 | 24.413 | 24.420 | 24.420 |
| — | 0.000 | 0.015 | 0.238 | 12.542 | 3 | 36.951 | 36.962 | → | 36.962 |
| — | 0.001 | 0.015 | 0.253 | 12.780 | 4 | 49.740 | 49.742 | → | 49.742 |
| — | 0.005 | 0.016 | 0.268 | 13.033 | 5 | 62.775 | → | → | 62.775 |
| — | 0.001 | 0.021 | 0.284 | 13.301 | 6 | 76.078 | → | → | 76.076 |
| — | 0.001 | 0.022 | 0.305 | 13.585 | 7 | 89.660 | → | → | 89.661 |
| | | 0.021 | 0.327 | 13.890 | 8 | 103.547 | → | → | 103.551 |
| | | | 0.348 | 14.217 | 9 | 117.772 | → | → | 117.768 |
| | | | | 14.565 | 10 | 132.335 | → | → | 132.333 |
| | | | | | 11 | | | | |
| | | | | | 12 | | | | |

kicsinyítés egyenértékű a nagyobb pontossággal való számolással, tehát visszavezethető az előző példákra.

Fenti megállapítások segítségével a trapéz adataiból előre megállapítható, mikor rentabilis a közelítő eljárás alkalmazása a trapézosztási feladatok megoldásánál.



$$T = 600 \text{ m}^2 \quad C = 12^m$$

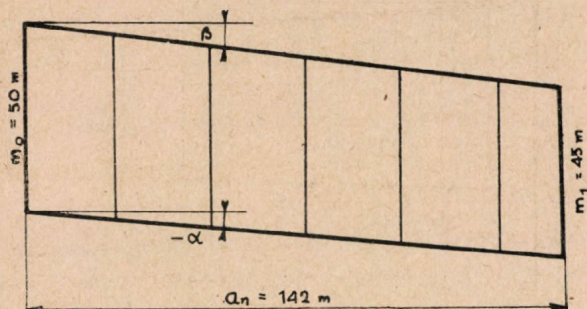
$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 0.1056339 \quad B = 0.001056339 \text{ m}^{-1}$$

$$a_k = k C + B a_k^2$$

| Különbségek | | | | | Sorszám | Közelítők | | | Végleges eredmény |
|-------------|-------|-------|-------|---------|---------|-----------|---------|--------|----------------------|
| V. | IV. | III. | II. | I-rendű | | 1. | 2. | 3. | |
| 0.003 | 0.003 | 0.029 | 0.329 | 12.156 | 1 | 12.000 | 12.152 | 12.156 | 12.156 |
| 0.001 | 0.006 | 0.032 | 0.358 | 12.485 | 2 | 24.312 | 24.624 | 24.641 | 24.641 |
| 0.001 | 0.007 | 0.038 | 0.390 | 12.843 | 3 | 37.455 | 37.482 | 37.484 | 37.484 |
| 0.007 | 0.006 | 0.045 | 0.428 | 13.233 | 4 | 50.714 | 50.717 | → | 50.717 |
| 0.002 | 0.013 | 0.051 | 0.473 | 13.661 | 5 | 64.375 | → | → | 64.378 |
| 0.001 | 0.015 | 0.064 | 0.524 | 14.134 | 6 | 78.514 | → | → | 78.512 |
| | 0.014 | 0.079 | 0.588 | 14.658 | 7 | 93.172 | → | → | 93.170 |
| | | 0.093 | 0.667 | 15.246 | 8 | 108.408 | 108.414 | → | 108.416 |
| | | | 0.760 | 15.913 | 9 | 124.334 | 124.330 | → | 124.329 |
| | | | | 16.673 | 10 | 141.005 | → | → | 141.002 |
| | | | | | 11 | | | | |
| | | | | | 12 | | | | |

Adósak vagyunk még annak az alkalmazott tételnek az igazolásával, hogy az n -rendű különbségek sorozata monoton növekvő sorozat. Tételünket tökéletes indukcióval fogjuk bizonyítani.

$$\frac{m_1}{m_0} = 0.9$$



$$T = 1200 \text{ m}^2$$

$$C = 24^m$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 0.0352113$$

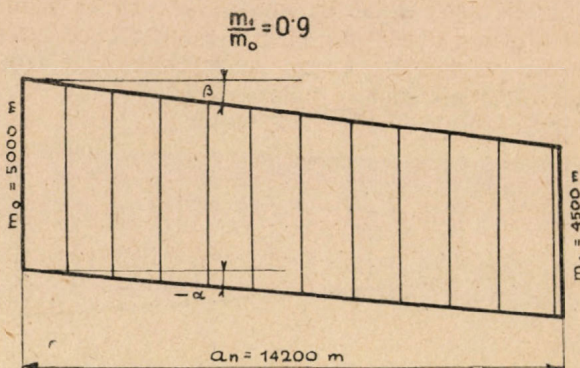
$$B = 0.000352113 \text{ m}^{-1}$$

$$a_k = k C + B a_k^2$$

| Különbségek | | | | | Sorszám | Közelítők | | | Végleges eredmény |
|-------------|-------|-------|-------|---------|---------|-----------|--------|--------|----------------------|
| V. | IV. | III. | II | I-rendű | | 1. | 2. | 3. | |
| — | 0.005 | 0.022 | 0.428 | 24.206 | 1 | 24.000 | 24.203 | —→ | 24.206 |
| | 0.000 | 0.027 | 0.450 | 24.634 | 2 | 48.412 | 48.825 | 48.839 | 48.840 |
| | | 0.027 | 0.477 | 25.084 | 3 | 73.902 | 73.923 | —→ | 73.924 |
| | | | 0.504 | 25.561 | 4 | 99.480 | — | —→ | 99.485 |
| | | | | 26.065 | 5 | 125.555 | — | —→ | 125.550 |
| | | | | | 6 | | | | |
| | | | | | 7 | | | | |
| | | | | | 8 | | | | |
| | | | | | 9 | | | | |
| | | | | | 10 | | | | |
| | | | | | 11 | | | | |
| | | | | | 12 | | | | |

Térjünk vissza a 3.) egyenlethez. Ezt zérusra redukálva, majd a másodfokú egyenletek elmélete szerint megoldva

$$a_k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4BCk}}{2B} \quad 4.$$



$$T = 6,000.000 \text{ m}^2 \quad C = 1200 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 0.0352113 \quad B = 0.000352113 \text{ m}^{-1}$$

$$a_k = kC + B a_k^2$$

| Különbségek | | | | | Sorszám | Közelítők | | | Végleges eredmény |
|-------------|-------|-------|--------|----------|---------|-----------|-----------|----------|-------------------|
| V. | IV. | III. | II. | I-rendű | | 1. | 2. | 3. | |
| 0.002 | 0.011 | 0.275 | 10.404 | 1205.114 | 1 | 1200.000 | 1205.070 | 1205.113 | 1205.114 |
| 0.003 | 0.013 | 0.286 | 10.679 | 1215.518 | 2 | 2410.228 | 2420.455 | 2420.629 | 2420.632 |
| 0.003 | 0.016 | 0.299 | 10.965 | 1226.197 | 3 | 3646.554 | 3646.822 | 3646.829 | 3646.829 |
| 0.001 | 0.013 | 0.315 | 11.264 | 1237.162 | 4 | 4883.980 | 4883.990 | → | 4883.991 |
| 0.007 | 0.014 | 0.328 | 11.579 | 1248.426 | 5 | 6132.415 | → | → | 6132.417 |
| 0.005 | 0.021 | 0.342 | 11.907 | 1260.005 | 6 | 7392.421 | → | → | 7392.422 |
| | 0.016 | 0.363 | 12.249 | 1271.912 | 7 | 8664.340 | 8664.334 | → | 8664.334 |
| | | 0.379 | 12.612 | 1284.161 | 8 | 9948.491 | → | → | 9948.495 |
| | | | 12.991 | 1296.773 | 9 | 11245.262 | → | → | 11245.268 |
| | | | | 1309.764 | 10 | 12555.044 | 12555.033 | → | 12555.032 |
| | | | | | 11 | 13878.177 | 13878.183 | → | 13878.184 |
| | | | | | 12 | | | | |

egyenletet nyerünk. Ez az egyenlet maga is mutatja azokat a nehézségeket, melyeket értekezésem bevezetőjében említettem a pontos képletek alkalmazásával kapcsolatban. A nevezőben szereplő $2B$ ugyanis az 1.) alatti második egyenlet alapján zérushoz tart, ha a trapéz vég nélkül megközelíti a parallelogrammát. Minthogy a_k véges szám, kell, hogy a számláló is zérushoz tartson. Ez a tény világosan mutatja, hogy a

számlálóban a gyök kétértékűségét mutató két előjel közül a feladat természetének a negatív előjel felel meg, s hogy a gyök értéke vég nélkül megközelíti az egységet. Az a_k meghatározására szolgáló képlet tehát parallelogramma esetében a határozatlan

$$a_k = \frac{0}{0}$$

alakra vezet, míg a parallelogrammától kevésbé eltérő feladatoknál az eltérés mértékének függvényében több-kevesebb számítási nehézség árán juthatunk eredményhez.

E határozatlanságot megszünteti a 4.) képlet sorbafejtése. Előbb azonban vezessük be egyszerűsítés végett a

$$4 B C = D \quad 5.$$

jelölést és így átszorzással

$$2 B a_k = 1 - \sqrt{1 - D k} \quad 6.$$

egyenlet nyerhető, a két előjel közül most már csak a negatív értékűt megtartva. A gyök sorbafejtése után:

$$2 B a_k = \frac{1}{2} D k - \left(\frac{1}{2}\right) D^2 k^2 + \left(\frac{1}{3}\right) D^3 k^3 - + \dots -$$

$$- \left(\frac{1}{2n}\right) D^{2n} k^{2n} + \left(\frac{1}{2n+1}\right) D^{2n+1} k^{2n+1} - + \dots$$

adódik, vagy számértékekkel:

$$2 B a_k = \frac{D k}{2} + \frac{D^2 k^2}{8} + \frac{D^3 k^3}{16} + \frac{5 D^4 k^4}{128} + \frac{7 D^5 k^5}{256} + \frac{21 D^6 k^6}{1024} + \dots \quad 7.$$

Ez az alak tényleg megszünteti a határozatlanságot, amint azt a $2B$ -vel való osztás, az 5.) egyenlet figyelembevétele, majd $B=0$ helyettesítés mutatja, mely esetben

$$a_k = C k = \frac{T}{m_0} k \quad k = 1, 2 \dots n$$

eredményre jutunk, mely a parallelogramma természetes megoldása.

Előrebocsátjuk azt az ismeretes tételt, hogy egymásután következő számok n -ik hatványai sorozatának $(n+1)$ -edik és magasabbrendű különbsége zérus. Képletben:

$$\Delta^k x^n = 0, \quad \text{ha} \quad k \geq n+1 \quad \text{és} \quad x = 1, 2, 3 \dots m \dots$$

Megjegyezzük, hogy k növekedése esetén a 7.) alatti polinom minden tagja növekszik, tehát az elsőrendű különbség képzésekor a különbségeket tagonként felírva, a különbség egy hasonló polinom lesz, s ennek minden tagja pozitív marad. Nyilvánvaló, hogy e polinom minden

P. 2212.
3814.

tagja növekszik k növekedése esetén, tehát, hogy az elsőrendű különbségek sorozata a 7.) alatti polinommal együtt monoton növekvő sorozat.

Altalában tételezzük fel, hogy az n -edrendű különbségek polinomja pozitívtagú. Tételünk értelmében e polinom csak k n -ed és magasabb hatványait tartalmazza. Tételezzük fel továbbá, hogy k növekedése esetén e polinom minden tagjának értéke növekszik, tehát, hogy az n -edrendű különbségek nyert sorozata monoton növekvő. Nyilvánvaló tehát, hogy az $(n+1)$ -edrendű különbség polinomja is pozitívtagú polinom lesz, s minthogy minden tagja k hatványainak függvénye (éspedig csak az $n+1$ és magasabb hatványoké) k növekedése esetén az $(n+1)$ -edrendű különbség is növekszik, tehát e különbségek sorozata is monoton növekvő.

Egyúttal belátható, hogy egy bizonyos határig az $(n+1)$ -edrendű különbségek sorozatának elemei kisebbek az n -edrendű különbségek sorozatának megfelelő elemeinél. Az utóbbiak polinomja ugyanis szemben az előbbiekével a k n -ik hatványait is tartalmazza. Ez a kisebbedés mindenesetre csak egy bizonyos határig következik be, mivel magasabbrendű különbségek esetén a rendszám faktoriálisának belépése, illetve ennek mintegy a hatványnál erősebb növekedése miatt ismét növekedés következik be. Ez a határ mindenesetre előbb következik be a paralelogrammától erősebben eltérő trapézeknél, azoknál azonban, melyekre a közelítő számítás rentabilis voltát megállapítottuk, e határ túllépésétől nem kell tartanunk.

Előmentszési koordinátaszámítás algebrai értékekkel, különös tekintettel az ellenőrzésre.

Dr. Tamás Zoltán.

1. §. Irodalmi adatok.

I. Ács—Zelcsényi: A számológép és alkalmazása c. könyv a 25. §-ban az előmentszésnek egyszerű géppel való számítását ismerteti, a délszögek tangens-értékeinek alkalmazása mellett. Ellenőrzésre (79. oldal szerint) az új pont és az alappontok koordináta-különbségeiből a délszögek cotangenseinek számítása, s ebből a délszögeknek táblázatból való visszakeresése szolgál. „Hibátlan számítás esetén ezeknek egyezniök kell a mért délszögekkel. Hangsúlyozzuk, hogy ezzel csak a gépi számítást és a délszögek tangenseinek kikeresését ellenőriztük.“

II. Ugyanott (a 81. oldalon): „Ha az ismeretlen pont koordinátáit két vagy több háromszögből vezetjük le, akkor a számítás ellenőrzését elhagyhatjuk.“

Ugyanazon könyv a 26. §-ban a váltós géppel való számítást ismerteti. A számítás ellenőrzésére szolgál (97. oldal szerint) az $X_n - X_1 = \frac{y_n - y_1}{\operatorname{tg} \delta_1}$ számítása. „Az utóbbi eljárással csak a gépi műveleteket, az előző eljárással viszont a tangensek kikeresését és a gépi műveleteket ellenőriztük.“

Az eredménysorban benthagyott y_n értékhez (a forgásmérő törlése után) hozzászorozzuk $\operatorname{tg} \delta_1$ értéket, amíg az eredménysorban y_1 jelenik meg. „Ha az átforgatás után pontosan, minden maradék nélkül kapjuk meg y_1 értékét, akkor a számítás során nem követtünk el hibát. A fordulاتمérőn $(X_n - X_1)$ értéket kapjuk. Felesleges az $(X_n - X_1)$ abszcissa különbséget képezni és a kapott eredménnyel összehasonlítani, mert ha az átforgatást maradék nélkül sikerült elvégezni, azzal már a gépi műveletet ellenőriztük.“

III. Dr. Tarics Sándor: A számológép alkalmazása a geodéziai műveletekben c. mű (Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa, 24. füzet) az előmentszés gépi számításának ismertetésénél az ellenőrzésre az előző forrásmunkától átvéve a következőket állapítja meg (13. oldal): „Az eredménysorban áll y_n . A beállítószerkezeten $\operatorname{tg} \delta_1$ -et beállítjuk és y_n -et átforgatjuk y_1 -re. Ha az átforgatást maradék nélkül sikerül elvégezni, akkor a *gépi művelet* elvégzése során nem követtünk el hibát. Az utóbbi forgatással a következő műveletet végeztük el:

$$\frac{y_n - y_1}{\operatorname{tg} \delta_1} = x_n - x_1$$

$(X - X_1)$ a fordulاتمérőn jelentkezik.“

IV. Dr. Tarics Sándor: Előjeles számolás váltós számológéppel c. cikk (Geodéziai Közlöny, 1947. évfolyam) hasznos útmutatást ad a számítás végrehajtására. Az ellenőrzésre (161. oldal) ugyanazon eljárást adja. „Ha az átforgatást pontosan el tudjuk végezni, akkor a gépi számítás során nem követtünk el hibát.“

V. Dr. Tarics Sándor: A váltós számológéppel való előjeles számolásról c. cikk (Geod. Közlöny 1948. évf., 88. old.) szerint ha az eredménysorban negatív koordináták jelennek meg dekadikus számok alakjában, akkor azok különösen ismételt előfordulás esetén zavarólag hatnak. „Egy olyan Brunsviga váltós számológép, amelynél a negatív számok az eredménysorban a fordulاتمérőhöz hasonlóan piros színben is jelentkezhetnének, ezt a zavaró körülményt kiküszöbölné.“

Az ellenőrzésre a IV. alattival azonos eljárásról van szó.

VI. Tamás Zoltán: Részletpontok számítása előmentszésből kettős számológéppel c. cikk (Geod. Közlöny, 1934. évf., 76. old.) a feladat megoldását tárgyalja, figyelemmel az előjelek lehetséges változataira. A háromszögelő hivatában a szerző által 1931-től kezdve végzett első magyarországi kísérleti számítások egyik szakasza, amikor kettős gép állott kölcsönképpen rendelkezésre, az ezen tanulmányban közzétett módon történt. Annak idején külön tehertétel volt, hogy főnöki utasítás alapján minden szereplő háromszög oldalnak 7 jegyű logaritmuszát is előállítani kellett. Ugyanitt: „A beállító szerkezeten nem lehetséges negatív számot lérehozni, itt mindig csak a számok abszolút értékei kerülnek beállításra.“ Ugyanott: (93. oldal) ezen számítási eljárásnak (negyedrendű) háromszögelési pontoknál való alkalmazására nézve a tanulmány megállapítja, hogy a *közölt* számítási eljárásnak nincsen numerikus ellenőrzése. Más háromszögekből való számítás esetében az új pont koordinátáinak közeli egyezősége csak a mérés jóságát igazolja.

VII. Ugyanazon szerzőnek „Koordinaterberechnung aus dem Einschneiden mittels einer Doppelmaschine“ című tanulmánya (Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1935—No. 6.) lényegében az előzővel azonos megállapításokat tesz.

VIII. Tamás Zoltán: A tangens értékek ellenőrzése, ha az előmetzést géppel számítjuk c. tanulmány (Geod. Közlöny, 1935.) az 1—5. §-ban a függvényértékek interpoláció útján való kijegyzésénél jelentkező hibák határait ad tájékoztatást, figyelemmel az egyes közkézen forgó függvénytáblázatok szerkesztésére. Ugyanott a bevezetésben áll (140. oldal): „Akár egyes, akár kettős géppel végezzük az egyenletrendszer számszerű megoldását, a szóbanforgó előmetszés számításának helyességére nincs ellenőrzésünk. Ugyanazon pontnak egy másik előmetszésből való számítása csak a mérés által való ellenőrzést jelenti, ily módon felderítetlenül maradnak tehát az olyan számítási hibák, amelyeknek hatása által a mérés hibahatárán belül mutatkozó összrendezőkhöz jutnak. Különösen hangsúlyozni kell, hogy ha a délszögek tangenseit hibásan jegyeztük ki, akkor az új pont összrendezői is hibásak lesznek, mert a szóbanforgó előmetszés helyett egy másik előmetszéshez tartozó egyenletrendszer megoldását végeztük. Az alább következő 6. §-ban gyakorlatilag könnyen alkalmazható képletet vezetünk le, amelynek alapján egy szükséges feltételt nyerünk a tangens értékek kijegyzésének helyességére vonatkozólag.“

Amennyiben a számítást az eddig kialakult szokás szerint a tangens értékek felhasználásával végezzük, a 6. §-ban az ellenőrzés céljára (140. oldal) a

$$\cot \gamma' = \frac{1 + p_1 p_2}{p_1 - p_2}$$

képlet szolgál, ahol $\gamma = (\delta_1 - \delta_2)$ és rövidebb jelöléssel $\operatorname{tg} \delta_1 = p_1$ a táblázatból kijegyzett értéket jelenti. Hogy a közölt képlet szerinti számítás adta $\cot \gamma'$ és a táblázatból kijegyzett $\cot \gamma$ érték között az egyébként hibátlan műveletek esetében mennyi maximális eltérés lehetséges, a cikk levezetésére kell utalnunk. „Azonban az esetek nagyobb százalékában a maximum alatt maradnak, úgy, hogy a tapasztalat szerint a táblázati $\cot \gamma$ utolsó decimálisra legtöbbször megegyezik a számított $\cot \gamma'$ értékkel. Ha tehát a gyakorlatban egyszerűen csak így járunk el, hogy az $(1 + p_1 p_2) : (p_1 - p_2)$, illetve $(1 + q_1 q_2) : (q_1 - q_2)$ műveletet számológéppel elvégezzük, igen nagy lépést tettünk a függvényértékek ellenőrzésére. A szerzőnek gyakorlatában előfordult a következő eset. A δ_2 szög függvényét 10"-re hibásan (a szomszédos rovatból) írtuk ki, a $\gamma = (\delta_2 - \delta_1)$ kivonásban pedig ugyancsak 10" hibát követünk el. Ezáltal olyan helyes számértékek szerepeltek, amelyek a δ_1 és $(\delta_2 + 10'')$ délszögekhez tartoztak. Természetesen az ilyen esetre az alkalmazott ellenőrzés nem nyújtott semmi felvilágosítást.“

* * *

Az I—IV. alatt említett irodalmi helyek az ellenőrzésre nézve csak egyszerű kijelentéseket tartalmaznak. Azoknak egyik vagy másik értelemben való bizonyítását az alábbi 4. §-ban adjuk. A VI—VIII. alattiak

indokolással adják szerzőnek ezirányú felfogását, viszont a VIII. alatti képlet használhatósága az említett helyen levezetést nyert.

2. §. Az előmentszés számítása algebrai értékekkel.

a)

Ha az alappontok $A = (y_1, x_1)$ és $B = (y_2, x_2)$, az új pont felé haladó irányugarak délszögei δ_1 és δ_2 , és rövidebb jelöléssel $\operatorname{tg} \delta_1 = t_1$, akkor az

$$\left. \begin{aligned} Y - Y_1 &= (X - X_1) \cdot t_1 \\ Y - Y_2 &= (X - X_2) \cdot t_2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \dots 1. \\ \dots 2. \end{array}$$

egyenletrendszernek y és x szerinti megoldása az új pont koordinátáit szolgáltatja. Ha az 1. egyenletből a 2. egyenletet kivonjuk és jobb oldalához $O = (X_2 t_1 - X_1 t_2)$ alakot hozzáadjuk és rendezzük, nyerjük a 3. egyenletet, a 2. egyenlet rendezéséből pedig a 4. egyenletet:

$$Y_2 = [Y_1 + (-X_1 + X_2) \cdot t_1] + (-X_2 + X) \cdot (t_1 - t_2) \quad \dots 3.$$

$$Y = Y_2 + (-X + X_2) \cdot (-t_2) \quad \dots 4.$$

Egészen hasonló egyenletek vezethetők le a cotangensek szerepeltetésével. Ezen, tisztán analitikai után, de az említett irodalmi helyekhez képest szembetűnő egyszerűséggel levezetett egyenleteknek megoldása vezet az új pont koordinátáinak előjelre helyes értékeihez. A számítás teljes menete a szereplő Y , X és tg mennyiségek előjeleinek bármilyen alakulása mellett is, a szükséges ellenőrzésekkel együtt a következő gépkezelési schema szerint történhetik *olyan* géppel, amelyik algebrai értékekkel való számolásra alkalmas. A IV. alatt hivatkozott cikk szerint tehát bizonyos korlátozások mellett a nálunk forgalomban lévő ú. n. váltós géppel is.

| Feladat | Lépés | B | F | E | Feljegyzendő | Törlés |
|-----------------------|-------|-------------|-------|---------------------|----------------------|--------|
| Decimálisok | | (6) | (6) | (12) | | |
| Függvényellenőrzés | P | | | $(1+t_1 \cdot t_2)$ | | B, F |
| | 1 | (t_1-t_2) | $?$ | 0 | $?\neq -\cot \gamma$ | minden |
| Decimálisok | | (6) | (3) | (9) | | |
| Koordinátaszámítás | P | | x_1 | y_1 | | B |
| | 1 | t_1 | x_2 | | | B |
| | 2 | (t_1-t_2) | $?$ | y_2 | $?\neq x_n$ | B |
| | 3 | $(-t_2)$ | x_2 | $?$ | $?\neq y_n$ | minden |
| Koordináta-ellenőrzés | P | | x_1 | y_1 | | B |
| | 1 | t_1 | x_n | $?$ | $?\neq x_n$ | B |
| | 2 | t_2 | x_2 | $?$ | $?\neq x_2$ | minden |

Teljesen hasonló a gép kezelése, ha a cotangens függvényeket használjuk, de ekkor y és x szerepet cserél.

A gép kezelésével kapcsolatos tennivalóknak szövegben való nehézkes és hosszadalmas elmondása helyett a végzendő műveletek egyes lépéseit táblázatos módon szemlélteti a közölt schema. Az egyes géprészeknél kijelölendő decimálisok száma zárójelben van feltüntetve. A beállításnál (B) algebrai (előjeles) értéket állítunk be; az F (forgásmérő) és E (eredmény sor) oszlopokban bejegyzett alg. értékeket az előző lépésből megmaradt gépállásból forgatással (átforgatás, beforgatás) kell létrehozni. A számunkra érdektelen mennyiségek ponttal, a keresett értékek kérdőjellel vannak jelezve. Az előkészítő lépések P betűvel (prae-parató) jelölve, egyszerűségük miatt további részletezés nélkül, de sorrend szerint először az E -ben, és azután az F -ben szereplő értéket kell behozni, ez utóbbit „üres“ beforgatással.

b)

A függvényeknek a VIII. alatti módszerrel való ellenőrzésére megjegyezzük, hogy e metszési szög $\gamma = (\delta_1 - \delta_2)$ szerint értelmezendő. A hivatkozott hellyel szemben ugyanis további tágítást tehetünk. T. i. közömbös, hogy az A és B alappontok közül melyik a bal- vagy jobb oldali, s így a γ szög esetleg negatív értéket is vehet fel, viszont a $\cot \gamma = (1 + t_1 t_2) : (t_1 - t_2)$ képlet akkor is érvényes. A gép kezelése miatt az ellenőrzési 1. lépés után $\cot \gamma$ ellenkező (szinben) előjellel jelenik meg a forgásmérőben.

Könnyen belátható, hogy az ellenőrzésre miért használjuk a $\cot \gamma = (1 + t_1 t_2) : (t_1 - t_2)$ relációt a $\tan \gamma = (t_1 - t_2) : (1 + t_1 t_2)$ helyett. Ez utóbbi reláció alkalmazása esetében ugyanis az $(1 + t_1 t_2)$ nevezőt csak számcsonkítás után tudjuk felhasználni, ami a hányados kiszámításánál éreztetné hatását, viszont az első reláció felhasználása esetén nincsen számcsonkítás.

A függvényértékek ellenőrzésének tárgyalt módja csupán szükséges feltételt nyújt azok kijegyzésének helyességére. Ha a függvényértékek helyesek, akkor \cot és $\cot \gamma$ egyezők; vagyis ezek megegyezése nélkül nem lehetnek jók a függvények. Fordítva azonban: ha $\cot \gamma$ és $\cot \gamma'$ egyezők, ez csupán lehetségessé, illetőleg valószínűvé teszi a függvények helyességét.

A számítás gyakorlata érdekében indokolt, hogy ezt az ellenőrzést még a koordináta számítás megkezdése előtt végezzük el.

c)

A IV. alatti hely lényegében ugyanazon gépkezelési schemát állapítja meg az előjeles értékekkel való számoláshoz, mint amit fentebb közöltünk. Az V. alatti hely azt javasolja, hogy az előjeles számítás érdekében a gép átalakítása útján az eredmény sorban vörösszínű számok is jelenjenek meg. Hisszük, hogy ezek az eredmények a IV. és V. alatti helyek szerzőjének önálló alkotásai annál is inkább, mert vizsgálataink eredményét eddig nem publikáltuk; és épen ez a körülmény adta az impulzust, hogy a hazai viszonyokra nézve az alábbiakat előadjuk.

Az algebrai számokkal való műveletek érdekében a gép átalakításának szükségességét e sorok szerzője már ezelőtt 15 évvel felismerte, azt

meg is oldotta, majd Szepešy József mérnök közreműködésével meg is valósult egy Odnher-féle számológépnek oly módon való átalakítása, hogy az átalakított gépen algebrai (előjeles) számokat lehetett beállítani, továbbá az F és E műben egyaránt jelentek meg fehér (+) és piros (—) számok. Az elő- és hátrametszésnek ezen átalakított géppel való számítási módját közös munka alapján állapítottuk meg s e §. elején bemutatott analitikai levezetés útján jutottunk a most közölt számítási schemához. Megállapodásunk szerint — személyemnek háttérben való maradása mellett — Szepešy az átalakított gépet és a cotangens értékek szerepeltetésével való számítási eljárást 1935-ben az Állami földmérésnél bemutatta, 95.023/1935. P. M. IX. b. szám alatt. Ez ügyben többen adtak szakvéleményt. Hajnal Sándor mérnök 1935 december 17-én kelt szakvéleményéből idézem a következőket:

„Nevezett géppel nagy számban végeztem különféle geodéziai számításokat, hogy a gép alkalmazási terét, módját, a számítások biztonságát és pontosságát meg tudjam bírálni.

A végrehajtott számítások alapján megállapítottam, hogy a gép kiválóan alkalmas az alsó geodéziában előforduló mindazon feladatok megoldására, amelyeknél bármilyen más számológépi eljárás gazdaságos és megfelelő pontosságú. Különösen jól alkalmazható részletpontoknak előzettséssel való tömeges felvételénél. Az általam végzett műveletek a következők: oldal- és délszögszámítás; ismeretlen pont összerendezőnek számítása előzettséssel és hátrametszéssel; területszámítás összerendezőkből és sokszögmenetek számítása.

Megbecsülhetetlen előnye a gépnek, hogy az előjelekre vonatkozólag *egyetlen* általános szabályt kell alkalmazni és ezen egyszerű szabály az előjelek bármilyen kombinációja mellett is érvényes. Az alapvető szabálynak az ismerete és betartása mellett előjel hiba sohasem fordulhat elő. Ezt a szabályt kell alkalmaznunk az „átforgatás” műveleténél is, tehát olyankor, amikor az eredményysorban, illetve a forgásmérőben lévő mennyiséget egy más mennyiségre kell átalakítanunk.

Az előterjesztésben az előzettsés megoldására ismertetett 5 lépéses művelet* annyira egyszerű és világos, hogy pár órai gyakorlat után könnyen megtanulhatjuk.”

Ezután helyesbíti az előterjesztésnek azt a részét, amely arra vonatkozik, ha az egyik függvényérték igen nagy szám. Hajnal megállapítja, hogy ilyen esetben az a helyes eljárás, ha a számítást avval az alapponttal kezdjük, amelyikhez a kisebbik abszolút értékű trigonometrikus függvény tartozik. Majd kiegészíti az előterjesztésnek a sokszögmenetek számítására vonatkozó részét a záróhiba elosztatásának módjával. Ezután így folytatja:

„Szükségesnek látom, hogy röviden foglalkozzam Zelcsényi Géza folyó évi június hó 7-én kelt s a tárgyalt számológépre vonatkozó jelentésével. Zelcsényi hátrányosnak találja a fordulat-

* A P előkészítő művelet ott két lépésnek szerepel.

mérő váltóját, mert ha ennek negatív állásában az utolsó számhelyen „X” betű jelenik meg: a második helyen lévő számot egyre növelni kell, illetve ügyelnünk kell arra, hogy az X-el jelelt számhely előtt a szükségesnél eggyel kisebb számot forgatunk be. A géppel végzett számításoknál az ily fajta kisebb kényelmetlenséget az ember igen hamar megszokja és sokszorosan kárpótolt érte az az óriási előny, hogy soha semilyen esetben sem kell az eredményisorban dekadikus kiegészítésekkel manipulálnunk, sem nullára visszaforgatnunk, vagy a váltoállásokra különleges szabályokat bevezetnünk. Az azonban természetes, hogy ha az X megjelenését nem vesszük figyelembe: hibás eredményt kapunk; de hiszen az X megjelenése épen azt célozza, hogy a számító figyelmét a szükséges kiegészítésre felhívja. Ez a kezelési eljárás különben is már igen rövid gyakorlat után ösztönyszerűvé válik és semmi kellemetlenséget nem okoz.

Zelcsényi jelentésének 2. oldalán egy számpéldát hoz fel annak illusztrálására, hogy a forgásmérő negatív állásakor milyen kedvezőtlen körülmény adódhat. Szerinte a forgásmérőn „— 87.964.325” negatív számot a forgásmérő negatív kiinduló helyzetéből (99 ... 9 X) kétféleképpen forgathatjuk le: pozitív és negatív értelmű forgatással. Megállapítja, hogy a pozitív értelmű forgatással teljesen hibás eredményt kapunk és ennek elkerülésére egy igen „kedvezőtlen” szabályt szövegez meg. Holott az általános és minden körülmények között betartandó általános szabályt az eredeti előterjesztés 2. oldal 6. bekezdése világosan megadja ... Világos tehát, hogy a Zelcsényi által felhozott számpéldánál feltétlenül negatív forgatással kell a fenti számot beforgatnunk.

Zelcsényi figyelmét bizonyára kikerülte az eredeti előterjesztésben foglalt egyszerű előjel szabály, csak így tudom megmagyarázni, hogy jelentésének 3. oldala 3. bekezdésében, úgyszintén a 7. oldal 2. bekezdésében újból nehézményezi a forgatás értelmére vonatkozó szabály hiányát, holott az utóbb említett példánál a hivatkozott szabály értelmében csakis pozitív értelmű forgatással kaphatunk helyes eredményt.

Zelcsényinek azt az aggályát, hogy a szelvényarsarkokra vonatkoztatott koordináták számítása többletmunkával jár és hibák forrásává válhat: magam is osztom; de nincsen semmi akadály annak, hogy a szóbanforgó géppel is a teljes koordinátákat, — vagy még helyesebben a százezresekkel kisebbitett koordinátákat — számítsuk ki.“

A bemutatott gépre vonatkozólag e sorok szerzője is adott szakvéleményt, ami nyilván pia fraus-nak látszik. Ez a szakvélemény azonban a feldicséréstől tartózkodva, csupán ténybeli megállapításokat tartalmazott. Ime a végső következtetés:

„Összegezve a háromváltós gépről alkotott véleményemet: javaslom, hogy a gép tömeges számításoknál is kipróbáltassék.“

Az előterjesztett kérdéskomplexum *akkor* elismerésre nem talált és az iratok tanúsága szerint Szepessy a gépet visszakapta, anélkül, hogy

írásbeli érdemi elintézés történt volna. E hallgatólagos elutasításnak további indító okait nem kerestük és nem keressük; azonban a kérdésnek nyilvánosságra hozásától természetesen eltekintettünk. Most, hogy hazai viszonylatban a IV. és V. alatti irodalmi helyek hasonlókat tartalmaznak, a minden kétséget kizáró prioritás érdekében a fentieket közölni szükségesnek mutatkozott.

A prioritás azonban nemcsak hazai, hanem külföldi viszonylatban is fennáll. Értesülésem van arról, hogy ott az algebrai értékekkel való számítás kérdése a szakirodalomban csak 1941-től kezdve merült fel és ugyancsak hasonló eredményekre jutottak. Ugyanezen évből származik a szabadalmi bejelentése egy olyan szerkezeti résznek, amely a szerző elgondolása szerint a gép átalakításához lényeges alkotórész volt.

A javasolt, tömeges számításoknál való kipróbálásra nem került sor, és íme, 13 év múltán hazai viszonylatban is újra (bár tőlünk függetlenül) ugyanazon javaslatok jelentkeznek, amiket már 1935-ben felismertünk, megoldottunk és megvalósítottunk. A külfölddel szemben fennállott gyakorlati magyar prioritás az idő múlásával elméleti értékűvé zsugorodott.

Az említett átalakított gép Szepessy mérnök irodájában állandó használatban volt, miglen a háborús viharok alatt elveszett.

3. §. Az egyenes egyenlete a számológépen.

Az egyenesnek $y = a + x \cdot t$ alakú egyenletét az előjelek bármilyen alakulása mellett lehet „ábrázolni” olyan géppel, amelyik algebrai értékekkel való számításra alkalmas. Itt a az Y tengelyből levágott darabot jelenti, amidőn $X = 0$. Ha előkészítő lépés által létrehozuk a gépnek $F = 0$, $E = a$ állását, akkor az előjeles t beállítása mellett bármilyen tetszőleges forgatás után is az F és E mindig összetartozó X és Y értékeket jelez, egyszerűen azért, mert a -hoz előjelre helyesen hozzászoroztuk $x \cdot t$ értéket. Az egyenes bármely pontjának megadott x értékéhez a hozzátartozó y -t, és fordítva, ily módon egyszerű beforgatással előállíthatjuk.

Ha az egyenesnek egyik $A = (Y_1, X_1)$ pontja és t_1 irányhatározója van adva egyenletét $Y = Y_1 + (X - X_1) \cdot t_1$ alakban írhatjuk fel. Ily esetben a géppel való ábrázolás érdekében az előkészítő lépés $F = X_1$ és $E = Y_1$ létrehozását kívánja; ettől kezdve t_1 beállítása mellett bármilyen tetszőleges forgatás után ugyancsak összetartozó X és Y értékeket nyerünk F és E -ben, mert ezáltal t_1 -nek $(X - X_1)$ -szeresét hozzászoroztuk Y_1 -hez. A gépkezelési sémát tehát:

| Lépés | B | F | E | Feljegyzés | Törlés | |
|--------|-------|-------|-------|------------|--------|--|
| \sim | | X_1 | Y_1 | | B | |
| l | t_1 | x | $?$ | $? = Y$ | | |

Ezek az eredmények megegyeznek a Geod. Közlöny 1944. évf. 50. oldalán ismertetett eredményekkel, de szerző által való megállapításuk

előbbi időből származik és az említett átalakított gépen való alkalmazás célját szolgálják.

Vizsgáljuk meg a 2. §-ban közölt koordináta számítási schemát.

Ismeretes, hogy az 1. számú lépés után az A -ból induló egyenesen lévő C pont koordinátáihoz jutunk. Rajzoljunk párhuzamosokat a koordináta tengelyekkel az új N ponton át és jelöljük a B pontnak ezen eltolt tengelyekre való vetületeit D és E -vel. Könnyű belátni, hogy a 2. és 3. számú lépés után B és E pontok koordinátáihoz jutunk. Ugyanis $CF = BD = EN = (X_n - X_2)$

$$\begin{aligned} \text{viszont} \quad FN &= CF \cdot \operatorname{tg} \delta_1 = (X_n - X_2) \cdot t_1 && \text{és ezek} \\ DN &= BD \cdot \operatorname{tg} \delta_2 = (X_n - X_2) \cdot t_2 && \text{különbsége} \\ FD - CF \cdot \operatorname{tg} \delta_3 &= (X_n - X_1) \cdot (t_1 - t_2) \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy a CD egyenesnek irányhatározója (dél-szögének tangense) $= t_1 - t_2$.

Az is világos, hogy DE egyenesnek délszöge $= (-\delta_2)$, ennél fogva irányhatározója $(-t_2)$.

Igy tehát a koordináták gépi előállítása során, hibátlan számítás esetében, az egyenesek egyenletének géppel való ábrázolása szerint $ACDE$ tört egyeneseken haladtunk végig.

4. §. A koordináta ellenőrzési módok vizsgálata.

A)

Az új pont koordinátái helyesen vannak számítva, ha azok a 2. §-ban közölt eredeti 1. és 2. egyenletekbe behelyettesítve, azokat kielégítik. Ez szükséges és elégséges feltétel a koordinátaszámítás helyességére, mert ez volt a feladat.

A 2. §-ban közölt schemának koordináta ellenőrzése által az ANB tört vonalon haladtunk végig, vagyis az új pont rajta van mindkét egyenesen, és ekkor az Y_n és Y_2 értékeket minden eltérés nélkül ugyanazon 9 decimálissal kell visszacapjuk, miként azok a koordinátaszámításkor a 2. és 3. számú lépésben az E -ban megjelentek. Ezekből azonban csak három decimalist szoktunk a számítási nyomtatványba bevezetni.

B)

Az I. alatt idézett ellenőrzés szerint az új pont és az alappontok koordináta különbségeiből a délszögek cotangenseit és ebből az eredeti délszögeket számítjuk ki; ez szükséges és elégséges feltétel a számítás helyességére. Ugyanis az új pont rajta van mindkét egyenesen, mert azok délszögeit a szereplő pontok koordinátáiból számítottuk. A tangens-értékek pedig azért helyesek, mert a délszögeket azoktól függetlenül (a cotangensek útján) állítottuk elő.

Hátránya azonban ezen ellenőrzésnek, hogy nem tudhatjuk, vajjon a hiba a függvények kijegyzésénél, avagy a számítás menetében történt.

C)

A II. alatt idézett $(X_n - X_1) = \frac{y_n - y_1}{\operatorname{tg} \delta_1}$ számítás csak *egyik* szükséges feltétel a koordináta számítás helyességére. Ennek kielégítése csak azt bizonyítja, hogy az új pont rajta van azon az egyenesen, amelyik az $A = (Y_1, X_1)$ ponton áthalad és irányhatározója $\operatorname{tg} \delta_1$. (Ezen egyenesnek bármelyik tetszőleges pontja is kielégíti a felhasznált egyenletet.) Ebből pedig még nem tudjuk, hogy az új pont a másik egyenesen is rajta van, tehát téves és helytelen az a megállapítás, hogy ezzel ellenőriztük a gépi műveletet.

A II—IV. alatt említett eljárásokban az történik, amit a koordináta ellenőrzési schemában a P és 1. számú lépésekben közöltünk, csakhogy a lépések fordított sorrendjében. Sőt még ennél is kevesebb, mert az említett eljárások a F szerepét teljesen mellőzik. Az egyenes egyenletének a gép által való ábrázolása azt bizonyítja, hogy ezen eljárással csak azt vizsgáltuk, hogy az új pont Y_n -ja kielégíti az egyik egyenes egyenletét, vagyis hogy ugyanazon Y_n értékhez jutottunk, mint amilyen a koordináta számítás 3. számú lépésében E -ben megjelent. Ez a körülmény pedig az egész számítás helyességét még egyáltalában nem jelenti. Azok a kitételek tehát, hogy felesleges az $(X_n - X_1)$ különbség képezése, és hogy a beforgatásnak maradék nélküli elvégzése esetében a gépi művelet során nem követtünk el hibát, — tévesek.

Jelöljük ki a AN egyenesen egy tetszőleges N' pontot, rajzoljunk párhuzamosokat a tengelyekkel és ezzel a $D'E'F'$ és $B'E'$ pontokat nyerjük. Könnyen beláthatjuk, hogy NED , illetve NDB háromszög hasonló és hasonló fekvésű a vesszős betűk által jelölt háromszöghöz. Ennélfogva $D'E' \parallel DE$ és $B'N' \parallel BN$, vagyis délszögeik egyenlők. Ha tehát bármilyen előmetzsésnél a koordináta számítás 2. számú lépésében Y_2 helyett egy tetszőleges hibás Y'_2 értéket hozunk be az eredmény sorba, akkor ezáltal a CD egyenesen lévő D' pontnak, a 3. számú lépésben pedig az E' pontnak koordinátáihoz jutunk. A hibás Y'_2 érték végtelen sokféleképpen választható. A nyert N' pontokra alkalmazva az említett ellenőrzési eljárást, a beforgatás maradék nélkül teljesül, mert az N' az első egyenesen rajta van.

Ez a megállapítás egyszerűen abból a jelenségből is következik, hogy az Y_2 érték csupán a 2. számú lépésnél lép be a számításba.

Mínthogy minden előmetzsésnek van egy megoldása, tehát tetszőleges más Y'_2 érték alkalmazása is egy új ponthoz vezet, amely rajta van az érintetlenül hagyott „első” egyenesen; az Y_2 megváltoztatása által egy idegen, (B) pontban áthaladó „második” egyenes szerepel a számításban.

D)

Számszerű példának azt választottuk, amelyet a IV. alatt hivatkozott helyen találtunk, de annyi eltéréssel, hogy az Y és X előjeleit ellenkezőre változtattuk. Ezáltal a számértékeknek a gépen való leolvasása könnyebbé válik. A függvényértékek ellenőrzését a számpéldáknál mellőztük, mert most csupán a koordináta számítás ellenőrzésére vonatkozó azon eljárásokat tesszük vizsgálat tárgyává, amelyeket a hivatkozott irodalmi helyek említettek.

A számértékek nyomtatványszerű elrendezése megfelel a 2. §-ban közölt gépkezelési schemának.

Első számpélda: Helyes megoldással:

$$\begin{array}{rcllcl}
 & & X_1 = -255.180 & Y_1 = 488.640 & & \\
 t_1 = -0.658.725 & X_2 = -1278.720 & & & & \\
 (t_1 - t_2) = -3.430.049 & X_n = -1469.755 & Y_2 = 1818.130 & 797215 & & \\
 (-t_2) = -2.771.324 & X_2 & Y_n = 1288.710 & 916875 & & \\
 \hline
 \text{Ellenőrzés:} & & Y_n = 1288.710 & 916875 & & \\
 t_1 = 0.658.725 & & Y_1 = 488.640 & 000000 & &
 \end{array}$$

Második számpélda: Az előző példához képest az Y_2 értéket a 2. számú lépésben hibás gépkezeléssel $Y_2 = 1918.130$ 445761

értékkel szerepeltetjük. Ezáltal $X = -1498.909$ és $Y_n = 1307.915$ 385525 koordinátákhoz jutunk. A vizsgálat tárgyává tett ellenőrzés elvégzésével $Y_1 = 488.640$ értékhez jutunk vissza.

Harmadik számpélda: Hibás gépkezeléssel a 2. számú lépésben $Y_2 = 2818.130$ értéket behozva, a kérdéses ellenőrzéssel most is visszajutunk a hibátlan Y_1 értékhez, bár efütté N pontot kapunk. Az előadott hibázási mód nem meríti ki azon eseteket, amelyekkel szemben a vizsgálat alá vont ellenőrzési eljárás érzéketlen. Az alábbiakban közlünk néhány „szerkesztett” számpéldát, amelyeknek számítási megismétlését az olvasóra bizzuk.

Negyedik számpélda: Az első számpéldától azáltal tér el, hogy a gépi művelet végrehajtásakor $(t_1 - t_2)$ és $(-t_2)$ számértékeit ellenkező előjellel szerepeltetjük. Ekkor

$$\begin{array}{rcllcl}
 & & X_1 = -255.180 & Y_1 = 488.640 & & \\
 t_1 = -0.658.725 & X_2 = -1278.720 & & & & \\
 t_1 - t_2 = -3.430.049 & X_n = -1087.685 & Y_2 = 1818.30 & 792215 & & \\
 -t_2 = -2.771.324 & X_2 & Y_n = 1288.710 & 916875 & &
 \end{array}$$

A tárgyalt ellenőrzéssel visszanyerjük: $Y_1 = 488.640$ 000000

Ötödik számpélda: Az első számpéldától azáltal tér el, hogy a gépi művelet végzésekor $(t_1 - t_2)$ számértékeit kölcsönösen felcserélve szerepeltetjük. Tehát

$$\begin{array}{rcllcl}
 & & X_1 = -255.180 & Y_1 = 488.640 & & \\
 t_1 = -0.658.725 & X_2 = -1278.720 & & & & \\
 t_2 - t_2 = -2.771.324 & X_n = -1515.163 & Y_2 = 1818.131 & 547032 & & \\
 -t_2 = -3.430.049 & X_2 = -255.180 & Y_n = 1007.120 & 471325 & &
 \end{array}$$

A tárgyalt ellenőrzéssel visszanyerjük: $Y_1 = 488.640$ 000000

Hatodik számpélda: A beállításra jutó függvényértékek bizonyos relatiók szerint vannak választva és a gépkezelésnél szerepeltetve. (Ezek a „függvényértékek” nem elégítik ki az ellenőrzésre javasolt relatiót, miként a negyedik és ötödik számpéldában sem.)

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Szerepeltessük} & Y_1 = -488.000 & X_1 = -255.000 & \\
 & Y_2 = -1836.0008 & X_2 = -1255.000 &
 \end{array}$$

értékeket és az 1., 2., 3. sz. lépésekben rendre -0.6 , -1.8 és -1.8 legyenek beállítva. A vizsgált ellenőrzési mód most is visszavezet Y_1 -hez.

Hetedik számpélda: Legyen $Y_1 = 488.000$, $X_1 = -255.000$, $Y_2 = -1848.000$, $X_2 = -1255.000$. A számítási lépésekben rendre -0.4 , -0.8 , -1.2 értékeket beállítva, a nyert Y_n után a kérdéses ellenőrzés alkalmával visszkapjuk $Y_1 = 488.000$ értéket.

Nyolcadik számpélda: Az előző számpélda alappontjait és azután a beállításoknál rendre -0.4 , -2.0 , -1.2 értékeket használva, a nyert Y_n után a kérdéses ellenőrzés alkalmazása mellett visszkapjuk Y_1 értékét.

Kilencedik számpélda: Legyen $Y_1 = 488.000$, $X_1 = -255.000$ és $Y_2 = 1858.000$ és $X_2 = -1255.000$; majd a beállításoknál rendre -0.6 , -2.8 , -3.4 értékeket szerepeltessünk. Az ellenőrzés Y_1 -hez vezet.

Felteslegesnek tartjuk, hogy ezen utóbbi számpéldákra nézve akár analitikai, akár geometriai úton általános érvényű bizonyítással foglalkozzunk. Az a körülmény, hogy az említett irodalmi helyeken javasolt ellenőrzési mód hibás és téves, elvileg már egyetlen számpélda bemutatásával is bizonyítva van.

Ezekből az esetekből azt a tanulságot kívánjuk levonni, hogy a koordináta számítás ellenőrzését a II—IV. alatt említett eljárások helyett a 2. §. a.-ban közölt schema szerint kell végezzük, ami szükséges és elégséges feltételt biztosít annak helyességére.

A függvények ellenőrzésének módja, mint említettük, csak szükséges feltételt elégíti ki.

E)

Ha ugyanazon pont több háromszögből számítandó, az I. alatt közöltekkel szemben fenntartjuk azt a felfogásunkat, hogy — a részlet-pontok eseteitől eltekintve — ekkor is minden számítást ugyanolyan módon való ellenőrzésnek kell alávetnünk, aminek indokolása VI—VIII. alattiakból nyerhető. De alátámasztja e felfogást szerzőnek az a tapasztalata is, hogy nem egy elkövetett hiba jelenti a veszélyt a számítás helyességére nézve, hanem ha két hibát követünk el, mert ezeknek egymást lerontó hatásuk lehet. Erre nézve utalunk a VIII. alatt említett „eltolási” esetre, továbbá a fentebbi 4. és 5. számú számpéldákra.

Szemle.

Kürti Vilmos.

A távolság mérés terén szinte forradalmi újítást eredményezett a rádió-technika és az elektromosságtan hatalmas fejlődése. Jóllehet a következőkben vázlatosan ismertetett új módszerek még csak kezdeti állapotban vannak, az eddig elért kísérleti eredmények oly biztatók, hogy joggal tételezhetjük fel az alapvető geodézia munkálatok, nevezetesen a háromszögelések terén, rövidesen olyan újszerű eljárásokat alkalmazhatunk, melyek az eddig használatos mérési műveleteket gyökeresen megváltoztatják, s a régieket nemcsak gazdaságosság, de pontosság terén is felülmúlják.

A Balti Geodéziai Bizottság 1948. évi közleményeiben megjelent *Erick Bergstrand* tanulmánya, magas frekvenciájú fényjelekkel való tá-

volságmérő berendezésről, *Edward Warchalowski* pedig a lengyel Geodéziai Intézet 1948. évi 2. számú kiadványában az említett készülékkel végrehajtott háromszögelések kiegyenlítését és pontosságát tárgyalja.

1. *Erick Bergstrand*: Távolságok mérése magas frekvenciájú fényjelekkel.

Elsőrendű háromszögelésekben az oldalhosszak meghatározása a feladat. Az átlagos hossz mintegy 30 km és a hosszúság meghatározása napjainkban majdnem kizárólag invar szalaggal való bázis méréssel történik, a meghatározás pontossága mintegy 1:500.000.

30 km-es oldalhossz közvetlen megmérésére lehetőséget nyújt az a körülmény, hogy a fény sebességének végleges és ügylátszik változatlan értéke van. A módszer Fizeau 1849-ben a fénysebességre végzett kísérletein alapul és a következő módon használjuk azt fel mérésekben.

Egy fényforrás fényt bocsájt ki, melynek intenzitása a frekvenciával változik. A fényt egy távoli tükör veri vissza, melyet egy indikátorral észlelünk, ennek érzékenysége a kibocsájtott fény frekvenciájának függvénye. Ha a frekvencia állandó, az indikátor reakciója a tükör távolságától függ. A távolságtól függő ciklikus változás alapján skála készíthető, melyet felhasználhatunk távolságmérésre.

A berendezés a fényforrásból áll, melynek fényét egy gömbtükör vetíti ki. A magas frekvenciájú fényforrás feszültségét kristályoszillátor szabályozza, a fény intenzitása az oszcillátor frekvenciájával változik. A fényt egy siktükör fotocellába veri vissza. A fotocella feszültsége is az oszcillátortól függ, érzékenysége pedig változik, úgy a frekvenciával, mint a kibocsájtott fénnel. A fotocellában lévő áram változik a távolsággal, maximuma egy előre meghatározható távolságnál lesz. A maximumok képezik a távmérésre szolgáló skála osztásvonásait, jóllehet ezek nem határozhatók élesen meg. Feltéve, hogy két azonos készülékkel rendelkezünk, úgy ezeket oly módon alkalmazhatjuk, hogy az egyik az áram maximumát, a másik pedig az áram minimumát szolgáltatssa. Az áramkülönbség mérésére szolgáló berendezéssel megállapítható az áram 0 pontja, a maximum és minimum eltérés felében. A 0 pont élesen meghatározható és ez alkalmasabb a távolsági-skála készítésére. A skálát ismert távolságon végzett mérésekkel állapítják meg.

A Rikets Allmänna Kartverk Lovö-i geodéziai állomásán végeztek kísérleti méréseket, a Lovö-Varby (7734 m) és a Lovö-Masmo (11.025 m) távolságokon. Az előbbinél kedvező, az utóbbinál kedvezőtlen látási viszonyok között. A Lovö-Varby távolság koordinátákból levezetett értéke 7733,73 m, a fényjelekkel nyert érték 7733,52 m, mely eltérés a felhasznált trigonometriai pontok hibahatárán alul marad.

A Lovö-i kísérletek eredményei azt mutatják, hogy 10 km távolságon a pontosság nagyobb, mint 1:1.000.000, jó látási viszonyok szükségesek, az észlelés legalkalmasabb időpontja alkonyattáján van. Jó látási körülmények között a mérés, a műszer felszerelésével egyetemben, mintegy két órát igényel. A kísérletek alapján joggal feltételezhető, hogy az eljárás 30 km távolságig hasonló pontossággal használható.

2. *Edward Warchalowski*: Új típusú háromszögelés.

A lengyel geodézia intézet 1948-ban megjelent közleményében *Edward Warchalowski* ismerteti olyan háromszögelések kiegyenlítését

és pontossági vizsgálatát, melyeket csak oldalhosszak mérésével határoz meg. A tanulmány rövid kivonata a következő:

Napjainkig a háromszögelés észlelése kizárólag azzal a módszerrel történt, hogy a hálózatban nagyszabatossággal megméri az alapvonalat és az összes törésszöget. A nagyszabatosságú alapvonalmérés sok munkát igényel, a hálózat pontossága pedig a mért alapvonalától távolodva, rohamosan csökken.

A rádiótechnika nagyarányú fejlődése lehetővé tette azt, hogy két pont közötti távolságot rövid elektromágneses hullámok felhasználásával mérjünk. Ez az eljárás jelenleg még nem éri el a megkívánt pontosságot, jóllehet olyan esetben sikerrel használható, hol nem törekszünk szélső szabatoságra. Az eljárás előnye az, hogy független a terepalakulástól, mely esetleg a közvetlen mérést lehetetlenné teszi.

Ezzel az eljárással egyidőben egy másik módszert is kidolgoztak, mely magas frekvenciájú fényjeleket használ fel távolságmérésre. A módszerrel legutóbb Svédországban kísérleteztek, mintegy 20 km távolságig, és olyan pontosságot értek el, mely nem marad mögötte a bázismérő berendezésekkel elérhető szabatoságnak. Ez esetben feltétlenül szükséges a pontok közötti kölcsönös láthatóság, de a mérőpálya alkalmassága egyáltalán nem játszik szerepet. A módszerrel nagy tömegben mérhetünk háromszög oldalakat, tehát egész hálózat meghatározására alkalmas eljárás, az oldalak tájékozása, azimutmérés és földrajzi koordináták meghatározása pedig az eddigi módszerekkel történik.

A tanulmány először a sík háromszögeket, majd az ellipszoidikusakat teszi vizsgálat tárgyává.

Egyenlő oldalú háromszögben az oldalak segítségével levezetett szögértékek középhibája a következő képlettel számítható:

$$m_{p1} = \pm \frac{m_a}{a} \sqrt{2}$$

melyben m_a egyetlen oldal középhibáját, a pedig az oldalhosszat jelenti. Ha megadjuk a szögértékben megkívánt pontosság határát, úgy számíthatjuk az oldalhossz relatív pontosságát a képlet segítségével. Pl. ha a szögzövéphibát $\pm 1''$ vagy $\pm 0,5'$ értékűnek vesszük, akkor

$$\frac{m_a}{a} = \frac{1}{206265} : \sqrt{2} = \frac{1}{290000}$$

$$\frac{m_1}{a} = \frac{0.5}{206265} : \sqrt{2} = \frac{1}{582000}$$

arra a következtésre jutunk tehát, hogy olyan háromszögelésekben, melyek az oldalhosszak mérésén alapulnak, nagy szabatoságot kell megkövetelnünk a hosszmerésekben.

A nagyfrekvenciájú fényjelekkel való távmérés, az eddigi kísérletek szerint kielégítő pontosságot nyújt.

A háromszögelés ily módon való végrehajtásával egyetlen háromszög mérésének jóságára nincs ellenőrzés. Kontrollt csak az oldalak ismételt mérésével nyerhetünk, mely azonban tekintettel a mérés gyors és könnyű módjára, nem jelent tetemes munkatöbbletet.

A cikk a továbbiakban a centrális rendszer és a teljes négyszög kiegyenlítését tárgyalja. Az oldalhosszak javítására a következő képlet szolgál:

$$(a_{ik}) = -S_{ik} \frac{\omega'' \sin l''}{\Sigma (S_{ik})^2}$$

A képletben

$$\omega = (\Sigma \arctg \frac{\pi_{iok}}{\rho - a_{ik}} - 180^\circ) \sin l''$$

$$\pi^2 = \frac{(p - a_{ik})(p - a_{oi})(p - a_{ok})}{p}$$

$$p = \frac{a_{oi} + a_{ok} + a_{ik}}{2}$$

$$S_{ik} = \frac{1}{4} \frac{\Delta_{iok}}{a_{oi}, a_{ok}} \left\{ + \frac{1}{\rho_{iok} - a_{oi}} - \frac{1}{\rho_{iok} - a_{ok}} - \frac{1}{\rho_{iok} - a_{ik}} - \frac{1}{\rho} \right\}$$

Δ a háromszög területét jelenti, o index pedig a centrumot.

Teljes négyszög kiegyenlítésénél az ω képlete a következőképpen alakul:

$$\omega = \left\{ \arctg \frac{\pi_{234}}{\rho - a_{24}} - \arctg \frac{\pi_{231}}{\rho - a_{21}} - \arctg \frac{\pi_{134}}{\rho - a_{14}} \right\} \sin l''$$

A következő fejezetek zártláncolatok, gömbi háromszögek és pontkapcsolások kiegyenlítését tartalmazzák.

A tanulmány eredményei a következők:

A csupán oldalhosszmérésre támaszkodó háromszögelés kielégítő pontosságú adatot nyújt a vízszintes részletmérés céljaira. Minthogy a hálózat pontossága nem csökken a hálózat kiterjedésével, előnyösebbnek mondható az eddig alkalmazott háromszögelési eljárásnál, még abban az esetben is, ha az oldalak mérésének pontossága: 1 : 200.000-ig is lecsökken, ami 20 km-en $\pm 0,1$ m hibát jelent.

A számított szögértékek az egész hálózatban egyenlő súlyúak, nincsenek terhelve a szabályos hibákkal, mint az oldalirányú refrakció, a pontjelek megvilágítása, légrefrakciók, stb.

A hálózat számítása, főleg kiegyenlítése sokkal egyszerűbbé válik, mivel kevés feltételi egyenlet szükséges és azok mind azonos alakúak, jöllehet az előzetes számítások látszólag sok munkát igényelnek.

A módszer elsőrendű hálózatokban 20 km oldalhosszig a pontosság csökkentése nélkül alkalmazható, sőt pontossága felülmúlja az eddig alkalmazott módszereket. Lehetővé válik nagyterjedésű területek sűrű háromszöghálózattal való felvétele.

Tudományos területen az új eljárás, nehézségerő mérésekkel és csillagászati meghatározásokkal kapcsolatosan, sok problémáját megoldhatja a geoidnak és az egyenlőtlen tömegeloszlás következtében fellépő anomáliáknak.

Felölös kiadó: *Oltay Károly*.

Budapest, XI., Műegyetem.

Előfizetőinkhez.

A Geodéziai Közlöny nem kap semmiféle külön támogatást, hanem az előfizetésekből fedezi költségeit s tartja fenn magát. Számláit azonnal fizetnie kell, tehát csak akkor adható egy-egy füzet a nyomdába, ha a füzet előállítási költsége már befolyt. Ezért nagyon kérjük előfizetőinket, hogy az előfizetési díjat a mellékelt csekklappal minél előbb fizessék be. Ugy szintén kérjük az előfizetés-hátralék azonnali beküldését is, a hátralék összege a mult számmal küldött csekklapon megtalálható.

A

Stephaneum nyomda és könyvkiadó rt.

kiadásában megjelent

és minden könyvkereskedés útján beszerezhető:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilvános r. tanár

GEODÉZIA

című műve III. kötetének 3. javított és bővített kiadása.

A mű a mérnöki gyakorlat szempontjából nagyon fontos vízszintes (helyszínrajzi) mérésekkel foglalkozik és fontosabb fejezetei az alábbiak:

Síkgeometriai alapfogalmak és számítások. A vízszintes mérés alapelve. Háromszögelés. Pontkapcsolások. Sokszögelés. Részletpontok meghatározása. Derékszögű és poláris koordináta mérés. Előmetszés. Tahimétria. Redukáló tahiméterek és tahigrafométria. Mērőasztal felvétel. Fotogrammetria. Kisebb felvételek (telek stb.). Közelítő felvételek. Földosztás, birtokrendezések, határszabályozás. Kitérőzések a vízszintes síkban.

GEODÉZIAI KÖZLÖNY

Felelős szerkesztő:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilv. rendes tanár

Szerkesztő bizottság:

Állami Földmérést érintő ügyek:

Acs Endre

műszaki tanácsos,

a Háromszögelő Hivatal főnöke.

Bence Tivadar

áll. főmérnök.

Kulturális ügyek:

Dr. Hőnyi Ede

szfőv. főmérnök.

Földreform ügyek:

Kiss Gyula

min. osztálytanácsos.

Magánmérnöki ügyek:

Murányi Tamás

okl. mérnök, magánmérnök,

Jakab Sándor

okl. mérnök, magánmérnök.

Külföldi lapszemle:

Kürti Vilmos

műegyetemi intézeti tanár.

Dr. Homoródi Lajos

áll. főmérnök.

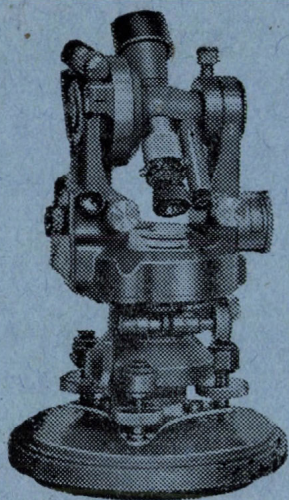
TARTALOM:

| | |
|---|----|
| Megemlékezés Dr. Bonsdorff T. Ilmari tanár 70. születésnapjáról | 33 |
| <i>Oltay Károly:</i> Budapest székesfőváros új felmérésének állása 1949 | |
| január 1-én | 35 |
| <i>Vincze Vilmos:</i> Pontkapcsolások számítása és vizsgálata | 40 |
| <i>Szemle (Kürti Vilmos)</i> | 67 |

Előfizetési ára: egész évre 72 forint, (havonta 6 forint).

A szerkesztőség címe:

Budapest, XI., Műegyetem. — Postatakarékpénztári csekkszám: 45.223.



WILD
HEERBRUGG

T. O. jelű busszolás teodolit

Könnyen kezelhető korszerű műszer. Vízszintes köre mint tájoló, vagy mint rögzített kör is használható. Leolvasása a WILD-féle incidenciás módszerrel és mikrométer-csavarral 1'. A távcső nagyítása 16X

Igen ajánlható erdészeti célokra,
valamint sokszögelésre.

Részletes ismertetőt és árajánlatot készséggel küld
a képviselet:

**FINOMMECHANIKAI GYÁRTMÁNYOKAT
ÁRUSÍTÓ K. F. T.**

Székház: BUDAPEST, IX., KÖZRAKTÁR-UTCA 20/A.

Telefon: 180—873*

Fiók: IV., APPONYI-TÉR 1., Telefon: 188—226.

GEODÉZIAI KÖZLÖNY

Felelős szerkesztő:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilv. rendes tanár.

Előfizetési ára: egész évre 72 forint (havonta 6 forint).

Szerkesztőség: Bpest, XI., Műegyetem. — Postatakarékpénztári csekk számla száma: 45.223.

M e g e m l é k e z é s

Dr. Bonsdorff T. Ilmari tanár 70. születésnapjáról.

A finn testvérnép világhírű tudósai február havában ünnepelték a kiváló geodétának, a finn Geodéziai Intézet igazgatójának, *Dr. Bonsdorff Toivo Ilmari* professzornak 70. születésnapját. Az ünnepség maradandó jeléül a vezetése alatt álló Intézet külön kiadványként emlékkönyvet jelentett meg. Ebben az ünnepi iratban — mély tisztelete kifejezéséül — sok finn és sok külföldi tudós közölt tanulmányokat a geodéziai tárgykörből.

Bennünket, magyarokat, azért is közelebbről érdekel e nagy és elismert tudós személye, mert neki volt köszönhető Budapest felmérésének 1933-ban való megkezdése. Budapest székesfőváros már régóta sürgetett új felmérésének megindítása azáltal vált lehetővé, hogy a finn Geodéziai Intézet, a finn kormány engedélyével, székesfővárosunk rendelkezésére bocsátotta a már sokszorosan kipróbált Jäderin rendszerű invardrótos alapvonalmérő készülékét. Ugyanis Magyarországon az időben sem a Műegyetem geodéziai tanszéke, sem az Állami Földmérés nem rendelkezett nagy hosszúságok legszabatosabb mérésére szolgáló különleges és természetszerűleg rendkívül költséges műszerrel és a hozzátartozó felszereléssel s így a budapesti felmérés megindítása csupán egy ilyen külföldi készüléknek bérlet, vagy kölcsön útján való beszerzése révén volt lehetséges.

A külföldi alapvonalmérő készülékek közül a finn Geodéziai Intézeté mutatkozott legalkalmasabbnak, mert ezt már évek óta használják nemcsak Finnországban, de vele végezték el a balti államok főalapvonalainak ellenőrző méréseit is s ezért vele mértek Svédországban, Dániában, Németországban, Lett- és Észtországban, Lengyelországban és Oroszországban is. Ezt a nagyon sok helyen kipróbált s ezért teljesen megbízható mérőberendezést sikerült a székesfőváros felmérése részére megszerezni és pedig nemcsak teljesen költségmentesen, de még avval a számottevő előnnyel is, hogy a budapesti mérés előtt és után végzendő

finnországi vizsgálatoknak (komparálásoknak) költségeit sem kellett a fővárosnak megtéríteni. A székesfőváros tehát költségmentesen jutott ennek a rendkívül értékes készüléknek a birtokába s idővesztés nélkül elvégeztethette 1933. év szeptemberében a bázismérést s ezzel megindíthatta a városmérést.

A székesfőváros közönsége ezt a nagy eredményt a finn Geodéziai Intézet kiváló vezetőjének, *Dr. Bonsdorff T. Ilmari* tanárnak köszönheti, aki kérésre, kormányra engedélyével a legnagyobb örömmel és lekötő szívésséggel bocsátotta rendelkezésünkre a már sokszorosán kipróbált finn bázismérő készülékét.

* * *

Dr. Bonsdorff Toivo Ilmari Hâmeenlinnában született 1879. február 15.-én. Fia volt *Bonsdorff Ernő* akkori igazgató-tanítónak, aki később professzor lett. 1898-ban érettségizett, jelölt-vizsgáját 1902-ben, doktori- és licencvizsgáját 1905-ben tette le, 1907-ben mint primust avatták filozófiai doktorrá s 1906-tól a helsinki egyetemen a gyakorlati csillagászat magántanáraként működött. 1903-tól 1917-ig a pulkovoi obszervatóriumban dolgozott s amikor 1918-ban a finn Geodéziai Intézetet megalapították, annak igazgatói tisztjével bízták meg s azt egészen mostanáig vezette.

Bonsdorff rendkívül nagy irodalmi működést fejtett ki, munkáinak felsorolását a Közlöny szűkreszabott keretei nem engedik meg. A tudomány ápolása és előbbre vitele volt a célja. Szerényen és öndicséret nélkül tette közzé kutatásainak eredményét, improduktív vitákkal nem foglalkozott. Nagy nyelvtudása lehetővé tette, hogy külföldi nyelveken is megjelentesse érdekes és értékes tanulmányait és ezekkel előmozdítsa a tudomány fejlődését és jól kiérdemelt dicsőséget szerezzen nemzetének.

Bonsdorff kezdeményezésére alakult meg 1924-ben a Balti Geodéziai Bizottság, amelyben, mint annak kezdetétől fogva *főtitkára* fejtett ki és fejt ki rendkívül értékes tevékenységet.

* * *

Nekünk most kedves kötelességünk, hogy 70. születésnapja alkalmából avval a szívből jövő meleg szeretettel gondoljunk rá és avval az őszinte barátsággal üdvözljük, amellyel ő volt és van irántunk. Mi, magyar geodéták nem fogjuk elfelejteni azt a nemes gesztusát, amellyel lehetővé tette a most már befejezéshez közeledő budapesti városmérés megindítását és azokat az érdemeit, amelyeket a felsőgeodéziai tudomány fejlesztésében elért. Őszinte szívből kívánjuk, hogy tudománya művelésében továbbra is jó egészségben, az eddigiekkel vetekedő további sikereket érjen el.

Budapest székesfőváros új felmérésének állása 1949 január 1-én.

Oltay Károly.

1. Bevezetés.

A felmérés kezdetétől, 1933-tól elmúlt 15 év alatt az új felmérés beigazolta, hogy a magánmérnöki kar kapacitása még ebben a különleges szaktudást és gyakorlatot kívánó felmérési ágazatban is nagyon kielégítő s ezért a városmérés teljes elkészülése csupán pénzkérdés. A munkálatok kívánatos előrehaladása évi 10%-ot tesz ki s amint az alábbi táblázat igazolja, ezt el is értük 1945-ben, amikor a pénzügyi lebonyolításban hitelkorlátozások nem voltak.

| Év | L é t s z á m | | | Egy évi előrehaladás %-ban |
|-------|----------------|--------------------------------|--------|----------------------------------|
| | okl. mérnök | műszaki és egyéb személyzet | munkás | |
| 1938 | 42 | 16 | 142 | 5,9 |
| 39 | 44 | 39 | 110 | 5,7 |
| 40 | 40 | 40 | 88 | 4,6 |
| 41 | 45 | 37 | 82 | 6,0 |
| 42 | 43 | 54 | 106 | 4,3 |
| 43 | 38 | 68 | 114 | 4,8 |
| 44 | 33 | 64 | 103 | 1,9 |
| 45 | 70 | 76 | 148 | 11,2 (egész év) |
| 46 | 69 | 78 | 167 | 7,6 |
| 47 | 61 | 62 | 107 | 7,2 |
| 48 | 44 | 40 | 167 | 3,0 |
| Átlag | 48 | 52 | 118 | 5,7 |

Eszerint a kapacitás a maximumot — 11,2%-ot — 1945-ben érte el, de ez 1946 és 1947-ben a pénzügyi korlátozások miatt lecsökkent 7,4%-ra.

A jelentés évében a teljesítmény erősen megkisebbedett, ami főleg és elsősorban a városmérésre fordított hitel nagymértékű visszaesése miatt következett be. Nagyon sajnálatos, hogy a városmérési kapacitást nem használhatjuk ki egészen, bár erre nagy szükség lenne, mert a városmérésnek — alapozó karaktere miatt — minél rövidebb idő alatt kell elkészülnie. A városmérés alapja minden technikai természetű működésnek, sőt az anyagából készíthető térképek sok egyéb célra is felhasználhatók.

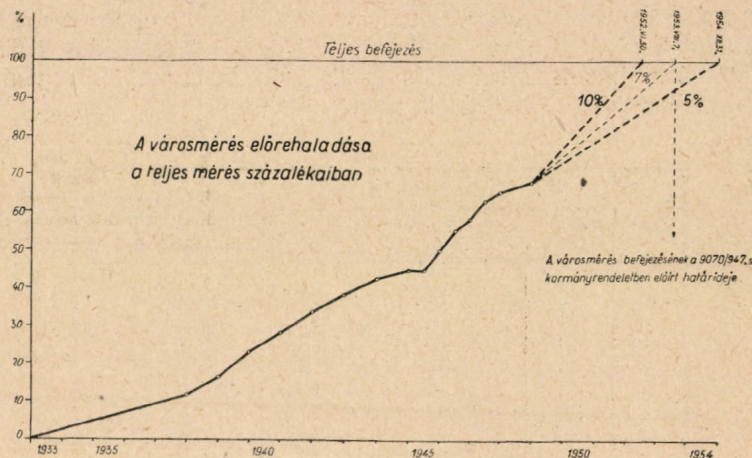
Kapacitás-egységül egy mérnökből, egy műszaki, illetve egyéb személyből és két munkásból álló csoportot vehetünk. Egy ilyen egységgel évi 0,12% (248 ha) teljesítmény érhető el, azaz évi 5%-os előrehaladáshoz 42 egység, a 10%-oshoz pedig 84 egység kell.

A 10%-os előrehaladás évi 2069 hektár teljes felmérését jelenti.

Az alkalmazható egységek száma tehát előre megszabja a teljesítmény nagyságát, belőle előre meg lehet állapítani az évi előrehaladás percentszámát.

Ezt jól láthatjuk az 1. ábrán, melyen a percentszámokat grafkusan tüntettük fel, s amelyen a szaggatott vonalak a városmérés teljes befejezését ábrázolják 5%, 7% és 10% esetén.

Nem tudjuk eléggé hangsúlyozni, hogy a városmérés elkészültében beálló elhúzódás milyen káros hatású. A városmérést nem lehet *l'art pour l'art* elv módjára végezni, a városmérést tervszerűen és minél előbb be kell fejezni. Az elhúzódás elavulással jár s a hosszantartó városmérés gyakorlatilag sohasem készül el. A városmérés *nem öncél*, annak ered-



1. ábra.

ményeire minden technikai létesítmény tervezésekor és kitűzésekor szükség van, tehát a városmérést minél rövidebb idő alatt el kell készíteni és át kell adni a műszaki közigazgatás szerveinek.

2. A munkálatok előrehaladása és állása 1949. január 1-én.

Az 1948. évben a már megkezdett munkarészekben elért teljesítményeket és azok állását az év befejezése alkamával a 2., 3. és 4. ábrán találjuk meg.

Ezek szerint 1948-ban

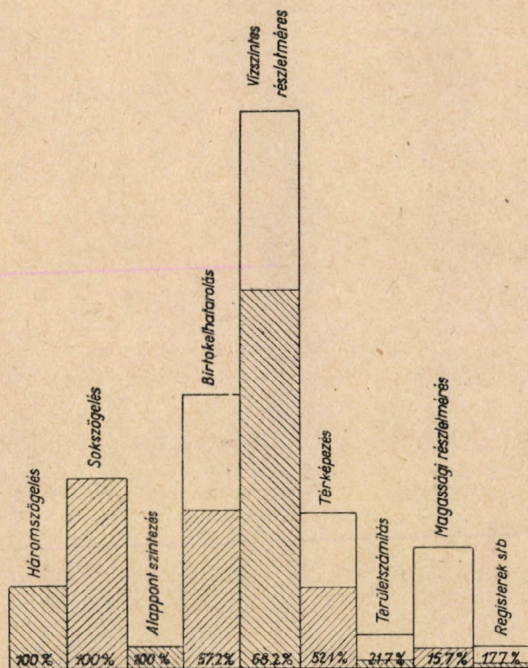
| | | | |
|----------------------------------|-------|--------------------------|---------|
| a birtokelhatárolásból elkészült | 19,2% | azaz a teljes városmérés | 0,51%-a |
| a vízszintes részletmérésből | 38,4 | „ | 1,27 |
| a térképezésből | 10,9 | „ | 0,81 |
| a magassági részletmérésből | 8,2 | „ | 0,31 |
| a területszámításból | 2,2 | „ | 0,09 |
| a regiszterekből | 1,1 | „ | 0,05 |
| Összesen | | | 3,04% |

ami területben 621 ha-nak felel meg.

Ha az előző évek teljesítményét is tekintetbe vesszük, úgy a városmérés eddigi elért előrehaladása mintegy 65%-ra tehető.

[illegible]

2. ábra.



Az új városmérés állása munkanemenként
1949. január 1-én.

3. *abra.*

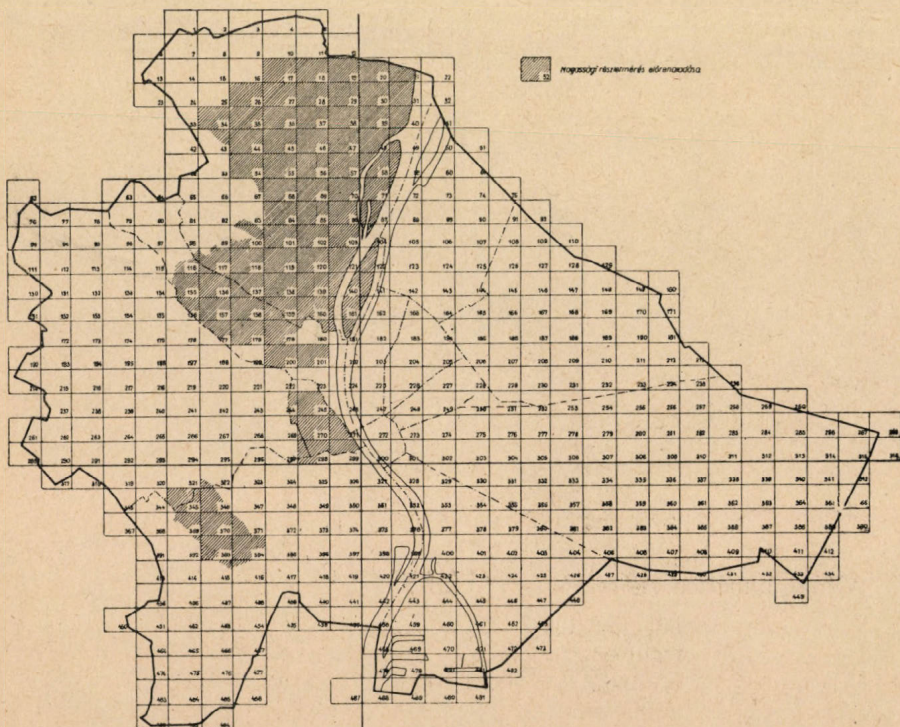
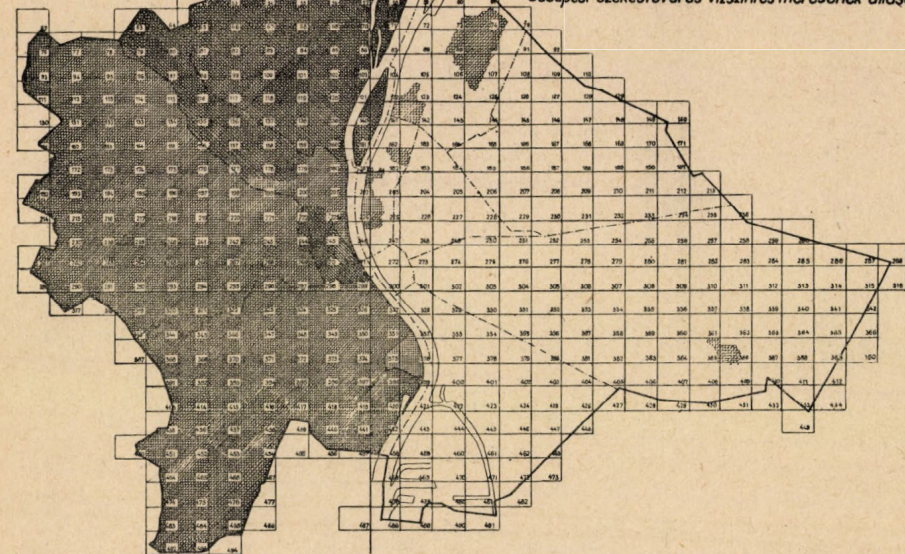
Teljesen elkészült munkák:

Háromszögletés
Alappontszinthezés
Sokszögletés
Egyszerűsített vízszint.mé.

Folyamatban lévő munkák:

Birtokhatárolás
Vízszint. részlelmérés
Térképezés
Területszámítás

Budapest Székesfőváros vízszintes mérésének állása:



4. ábra.

3. A városmérési hitel felhasználása.

Az 1948. évre városmérés címre a költségvetésben

1,650.000

forint volt beállítva.

Ebből az egyes munkarészekre az alábbi összegeket adtuk ki.

| | | | |
|-------------------------|------------|----------|---------|
| Vezetőség | 19400,— | Ft, azaz | 1,17% |
| Központi igazgatás | 43812,33 | „ | 2,65 „ |
| Alapponyilvántartás | 37253,04 | „ | 2,26 „ |
| Birtokelhatárolás | 202304,65 | „ | 12,28 „ |
| Vízszintes részletmérés | 1035913,42 | „ | 62,77 „ |
| 1:1000-es térképezés | 108811,25 | „ | 6,59 „ |
| Műhely | 34637,22 | „ | 2,09 „ |
| Telep | 63927,55 | „ | 3,86 „ |
| Elvont hitel | 104573,39 | „ | 6,33 „ |

Az „elvont hitel“ címen szereplő összeget a III. ügyosztály más célra használta fel s így a tulajdonképeni városinérésre voltaképen

1,546.077,40

forintot fordítottunk.

A városmérési hitel felhasználását más csoportosításban is egybeállítottuk.

| | | | |
|---------------------------------|------------|----------|---------|
| Kirendeltségi mérnökök | 51330,— | Ft, azaz | 3,11% |
| Napidíjas hivatalnokok | 7245,— | „ | 0,43 „ |
| Magánmérnökök | 1045883,39 | „ | 63,39 „ |
| Munkások | 291795,24 | „ | 17,74 „ |
| Fuvar és közlekedés | 18743,— | „ | 1,13 „ |
| Berendezés, felszerelés, műszer | 2544,— | „ | 0,14 „ |
| Öregségi és kereseti adó | 76812,93 | „ | 5,26 „ |
| Anyagok | 40723,90 | „ | 2,47 „ |
| Elvont hitel | 104573, 3 | „ | 6,33 „ |

* * *

A városmérés megindulása óta 1949. január 1-ig a főváros a városmérésre

20,380.749,46

forintot költött.

4. Személyzeti adatok.

A kirendeltség tagjai közül

| | |
|-------------|----|
| okl. mérnök | 16 |
| technikus | 3 |
| más műszaki | 17 |
| napszámos | 74 |

A magánmérnoki irodákban

| | |
|---------------------------|----|
| okl. mérnök | 28 |
| technikus, rajzoló | 14 |
| érettségizett alkalmazott | 6 |
| napszámos | 93 |

Ezek szerint 1948. évben a városmérésben dolgozott

44 okl. mérnök,
40 érettségizett alkalmazott,
167 napszamos.

A városmérésre súlyos veszteséget jelentett a kirendeltség helyettes vezetőjének, *dr. Tarics Sándor* főmérnök, műegyetemi magántanárnak kiválása, akit az a nagy megtiszteltetés ért, hogy az Északamerikai Egyesült Államok egyik egyeteme tanárnak hívta meg. Ő ezidőszerezt az Indiana államban lévő *Fort Wayne* egyetemén tanít. Kiváló szakértelmét, nagyszerű vezetőképességét és kedves modorát nehezen fogjuk nélkülözni, de reméljük, hogy tapasztalatokban és tudásban megerősödve újra vissza fog térni körünkbe.

Pontkapcsolások számítása és vizsgálata.

Vincze Vilmos.

I.

Bevezetés.

Geodéziai vízszintes alapponthálózatot pontkapcsolással sűrítünk. A meghatározandó pontokat, főleg szögméréssel geometriai kapcsolatba hozzuk ismert alappontokkal, majdpedig a mérési eredmények segítségével, e kapcsolat alapján, a pont helymeghatározó adatait kiszámítjuk.

Hibátlan mérés esetén az eredmény pontossága csupán a számítás élességétől függ és elvileg bármelyik geometriai kapcsolat megfelelő, ha az geometriailag határozott.

Méréseink pontossága azonban korlátozott és a mérési eredmények mindig hibával terheltek. E hibák hatása a számítás eredményeire a különböző geometriai alakzatoknál más és más lehet.

E tanulmányban egy geometriai tételt mutatunk be, mely alkalmas a pontkapcsolások számítására, másrésztől módot nyújt a mérési hibák hatásának vizsgálatára és a pontkapcsolások alakzatának elbírálására az eredmény megbízhatósága szempontjából.

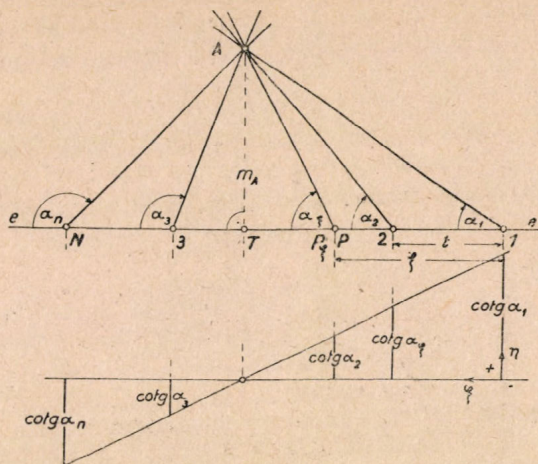
II.

Geometriai alaptételek.

A számításaink és vizsgálataink alapját képező geometriai tételt a következőképen fogalmazhatjuk meg:

Ha a síkban lévő A pontra illeszkedő sugársort egy tetszőszerinti e egyenessel átmetszünk, akkor a metszéseknél keletkezett $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ szögek cotangensei, az e egyenes mentén, linearitást mutatnak. (1. ábra.)

Az α_i alatt értjük mindig azt a szöveget, melynek baloldali szára az e egyenes és a másik szárát e-ből az óramutató-járással egyező forgással kapjuk.



1. ábra.

Az 1. ábra alapján felírható, hogy

és

$$\overline{TP_1} = m_A \operatorname{ctg} \alpha_1$$

$$\overline{TP_2} = m_A \operatorname{ctg} \alpha_2$$

$$\overline{TP_1} - \overline{TP_2} = t$$

vagyis

és általában

$$\left. \begin{aligned} t &= m_A (\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_2) \\ \xi &= m_A (\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_\xi) \end{aligned} \right\} \dots 1.$$

Az 1.) összefüggéseket m_A -ra megoldva kapjuk

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha_\xi = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_2 - \operatorname{ctg} \alpha_1}{t} \xi + \operatorname{ctg} \alpha_1} \dots 2.$$

vagyis általában a ξ, η rendszerben

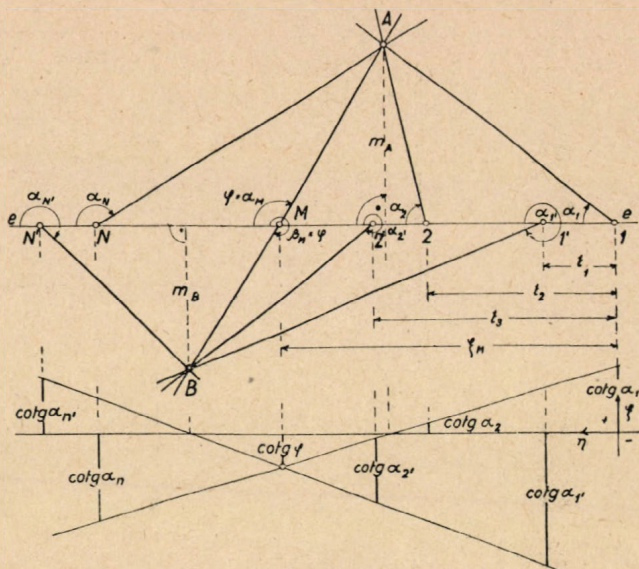
$$\eta_a = m_a \xi + b_a$$

ami az e_a egyenessel ábrázolható és ezzel tételünk bizonyítva van.

* * *

Vegyünk fel a síkban most két pontot, A-t és B-t és a rájuk illeszkedő sugársorokat messzük át egy tetszőszerinti e egyenessel. (2. ábra.)

Az előző tétel szerint a metszéseknél keletkezett $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ és $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ szögek cotangensei az e egyenes mentén lineárisan változnak és ezt a linearitást most az e_a és e_β egyenesekkel ábrázolhatjuk a ξ, η rendszerben.



2. ábra.

Az AB és e egyenes metszéspontjában M -ben:

$$\beta_M = \alpha_M + 180^\circ$$

tehát

$$\cotg \beta_M = \cotg \alpha_M = \cotg \varphi,$$

ahol φ az \overline{AB} és e egyenesek hajlásszöge.

Ezt a feltételt csak az e_α és e_β egyenesek metszéspontja elégíti ki, következésképpen az e_α és e_β egyenesek metszéspontjának ordinátája: $\cotg \varphi$.

A 2. alatti összefüggés alapján felírható az e_α és e_β egyenesek egyenlete. A 2. ábra jelöléseivel:

$$\left. \begin{aligned} \cotg \alpha_\xi &= \frac{\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_1}{t_2} \xi + \cotg \alpha_1 \\ \eta_\alpha &= m_\alpha \xi + b_\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3a.$$

$$\cotg \beta_\xi = \frac{\cotg \beta_2' - \cotg \beta_1'}{t_3 - t_1} (\xi - t_1) + \cotg \beta_1'$$

rendezve

$$\left. \cotg \beta_\xi = \frac{\cotg \beta_2' - \cotg \beta_1'}{t_3 - t_1} \xi + \left(\cotg \beta_1' - \frac{\cotg \beta_2' - \cotg \beta_1'}{t_3 - t_1} t_1 \right) \right\} 3b.$$

$$\eta_\beta = m_\beta \xi + b_\beta$$

A 3a.) és 3b.) jelű egyenletekkel jellemzett egyenesek metszéspontját a következő összefüggés adja:

$$\eta_M = \frac{m_\alpha b_\beta - m_\beta b_\alpha}{m_\alpha - m_\beta},$$

a) Adva van az A és B pont koordinátaival, továbbá meghatároztuk ϑ_A és ϑ_B délszögeket és meghatározandó: x_p és y_p .

b) Adva van az $\overline{AB} = t$ távolság és mértük α_p és β_p szögeket. Meghatározandó a P pont a_p és m_p helyi koordinátái.

Az első esetben tájékozott irányokkal való előmetszésről, a második esetben belsőszöges előmetszésről beszélünk. Tételünk az *utóbbira* alkalmazható közvetlenül.

Ha a 2.) alatti egyenletbe behelyettesítjük az

$$\alpha_{\xi} = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \xi = \alpha_p$$

összetartozó értékeket, akkor a 3. ábra jelöléseivel

$$0 = \frac{\cotg \beta' - \cotg \alpha}{t} a_p + \cotg \alpha$$

és a_p -re megoldva

$$\left. \begin{aligned} a_p &= t \frac{\cotg \alpha}{\cotg \alpha - \cotg \beta'} \\ n_p &= \frac{t}{\cotg \alpha - \cotg \beta'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5.$$

a belsőszöges előmetszés ismert összefüggéseit kapjuk.

2. A szögmérési hiba hatása.

Mielőtt az előmetszés legkedvezőbb alakzatának feltételeit megvizsgálánk, egy segédtelet ismertetünk. Az e_a egyenest, mint függvényt meghatározó adatokat *méréssel* állapítjuk meg, a 0 helyét pedig *kiszámítjuk*. Így a szögmérés hibája az e_a bizonytalanságában, illetve a számítás eredményében közvetlenül jelentkezik.

Nem foglalkozunk most a szögmérés hibaforrásaival és feltesszük, hogy minden szöget egyforma + vagy — ϵ'' hibahatárral tudunk mérni.

A $\pm \epsilon''$ szögmérési hibahatár a P pont számára egy hibanégyszöget jelöl ki, melynek nagysága csupán az A , B és P pontok relatív helyzetétől és az ϵ nagyságától függ és *teljesen független a pontok meghatározására szolgáló geodéziai koordináta rendszertől.* (3. ábra.)

A vizsgálatainknál csupán a pontkapcsoláshoz szükséges mérések hibáit vesszük figyelembe és az alapponthálózatot hibátlanak tételezzük fel.

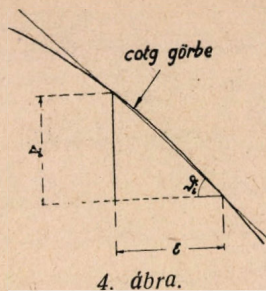
A P pont bizonytalanságát ezért egy olyan helyi koordinátarendszerben is vizsgálhatjuk, amelynek tengelyei \overline{AB} és a rá merőleges egyenes.

Az ϵ'' szögmérési hibának a ξ, η rendszerben (3. ábra)

$$\Delta_i = \cotg(\alpha_i \pm \epsilon) - \cotg \alpha_i$$

hiba felel meg.

Mivel jó mérés esetén ϵ'' kis érték, ezért a Δ_i hibát kifejezhetjük a \cotg görbe érintőjének segítségével is.



A 4. ábrából kivehető, hogy

$$\operatorname{tg} \vartheta_i = \frac{\Delta_i}{\varepsilon}$$

de

$$\operatorname{tg} \vartheta_i = \frac{d \operatorname{ctg} \alpha_i}{d \alpha} = - \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}$$

tehát:

$$\Delta_i = - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_i} \quad \dots \dots \dots 6.$$

ahol:

$$\varepsilon = 0,0000048 \varepsilon''.$$

A 6.) összefüggésből kiolvasható, hogy minél kisebb α_i , annál nagyobb Δ_i és egyenlő pontosságú mérés esetén is a Δ_i hiba különböző lehet.

A 3. ábrán feltüntettük a $\pm \Delta_i$ értékeket az e_α egyenes mentén minden pontban. Mint látjuk, az e_α egyenes a hibás mérés miatt az e_α' és az e_α'' helyzetbe is kerülhet és így a 0-hely eltolódása $\pm \Delta t_i$ is lehet. Mivel Δt_i a P pont bizonytalanságát is méri, ezért a P pont bizonytalanságát a ξ, η rendszerben vizsgálhatjuk.

Legyenek a hibanégyszög pontjainak koordinátái sorban:

$$m_1, a_1, m_2, a_2, m_3, a_3 \text{ és } m_4, a_4.$$

Az 5. képletek szerint a 3. ábra jelöléseivel:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= t \frac{\operatorname{ctg}(\alpha - \varepsilon'')}{\operatorname{ctg}(\alpha - \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' + \varepsilon'')} \text{ és } m_1 = \frac{t}{\operatorname{ctg}(\alpha - \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' + \varepsilon'')} \\ a_2 &= t \frac{\operatorname{ctg}(\alpha - \varepsilon'')}{\operatorname{ctg}(\alpha - \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' - \varepsilon'')} \text{ és } m_2 = \frac{t}{\operatorname{ctg}(\alpha - \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' - \varepsilon'')} \\ a_3 &= t \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon'')}{\operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' - \varepsilon)} \text{ és } m_3 = \frac{t}{\operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' - \varepsilon)} \\ a_4 &= t \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon'')}{\operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' + \varepsilon)} \text{ és } m_4 = \frac{t}{\operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon'') - \operatorname{ctg}(\beta' + \varepsilon)} \end{aligned} \right\} 5'.$$

Jelöljük az $\overline{I3}$ átló \overline{AB} -re eső vetületét $2\Delta t_{13}$ -mal és az m -re esőt $2\Delta m_{13}$ -mal, végül a 24 átló \overline{AB} -re eső vetületét $2\Delta t_{24}$ -gyel.

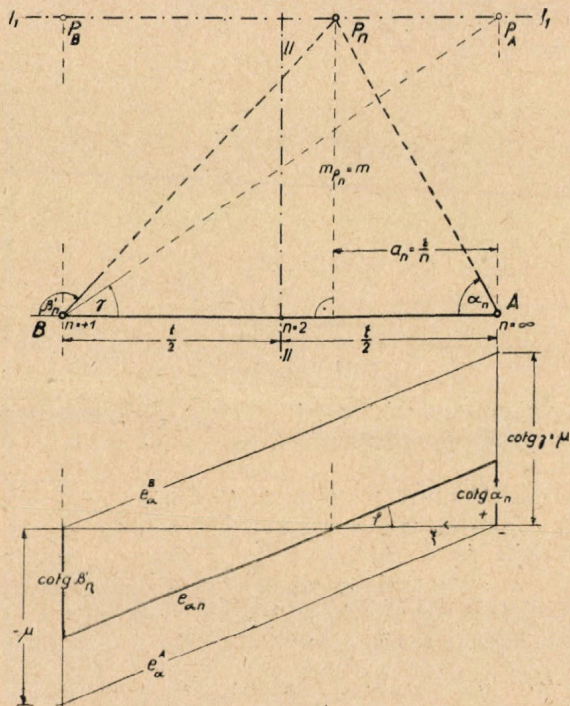
A P pont legkedvezőbb helyzetének vizsgálatát a következő lépésekben végezzük el:

A P pont az \overline{AB} egyenessel párhuzamos I—I egyenesen mozog.

A P pont az \overline{AB} egyenes felező pontján átmenő rá merőleges II—II egyenesen mozog.

A P pont az \overline{AB} egyenesre, mint átmérőre rajzolt körön mozog.

3. A P pont az AB -vel párhuzamos egyenesen mozog.



5. ábra.

a) Először Δt_{24} -et vizsgáljuk.

Az 1.) összefüggés alapján az 5. ábra jelöléseivel felírhatjuk, hogy

$$t = m (\cotg \alpha_n - \cotg \beta_n')$$

ebből következik két összefüggés:

$$(\cotg \alpha_n - \cotg \beta_n') = \frac{t}{m} = \ctg \gamma = \mu$$

és

$$\frac{1}{m} = \frac{\cotg \alpha_n - \cotg \beta_n'}{t} = \tg \varphi = \text{const.}$$

A 8.) összefüggésből következik, hogy amíg a P pont a P_A -ból

P_B -be halad, addig az e_α egyenes önmagával párhuzamosan mozdul el az e_α^A helyzetből az e_α^B -be, továbbá az α_n és β_n' szögek cotangenseinek összege állandó.

Tehát az 5.) egyenlet szerint

$$\alpha_n = \frac{t}{n} = t \frac{\cotg \alpha_n}{\cotg \alpha_n - \cotg \beta_n'}$$

innen

$$\left. \begin{aligned} \cotg \alpha_n &= \frac{\cotg \alpha_n - \cotg \beta_n'}{n} = \frac{1}{n} \cotg \gamma \\ \cotg \beta_n' &= \frac{n-1}{n} \cotg \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 9.$$

és

Továbbá:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha_n &= \frac{m^2}{\left(\frac{t}{n}\right)^2 + m^2} \\ \sin^2 \beta_n &= \frac{m^2}{\left(\frac{n-1}{n}t\right)^2 + m^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10.$$

és

A 3. ábra alapján a Δ_i hiba a P pont egyenesében (Δ_p) a következő:

$$|\Delta_p| = |\Delta_{An}| + \frac{|\Delta_{Bn}| - |\Delta_{An}|}{n} \dots \dots \dots a.$$

de a 6.) képlet szerint:

$$\Delta_{An} = -\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} \quad \text{és} \quad \Delta_{Bn} = -\frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n'}$$

A 10.) alatti összefüggés szerint:

$$|\Delta_{An}| = \varepsilon \frac{\left(\frac{t}{n}\right)^2 + m^2}{m^2} \quad \text{és} \quad |\Delta_{Bn}| = \varepsilon \frac{\left(\frac{n-1}{n}t\right)^2 + m^2}{m^2}$$

figyelembe véve a 8.) összefüggést is:

$$\Delta_p = \pm \varepsilon \{1 + \mu^2 n^{-1} - \mu^2 n^{-2}\} \dots \dots \dots 11.$$

A 3. ábra alapján felírható, hogy (eltekintünk Δ_p -nek a $\Delta_{t_{24}}$ hosszon való változásától)

$$\frac{\Delta_p}{\Delta_{t_{24}}} = \tg \varphi$$

vagyis

$$\Delta_{t_{24}} = \Delta_p \cotg \varphi$$

De a 8.) összefüggés alapján:

$$\cotg \varphi = m$$

és így

$$\Delta t_{24} = m \Delta p$$

tehát a 11.) alapján:

$$\Delta t_{24} = \pm m \varepsilon \{1 + \mu^2 n^{-1} - \mu^2 n^{-2}\} \quad 12.$$

Feladatunk mostmár megvizsgálni, hogy hol van a $\Delta t_{24} = f(n)$ függvénynek szélső értéke.

$$\Delta t'_{24} = \frac{d \Delta t_{24}}{dn} = m \varepsilon \{-\mu^2 n^{-2} + \mu^2 n^{-3}\}$$

$$\Delta t'_{24} = m \varepsilon \left\{ -\mu^2 \frac{1}{4} + \frac{2}{8} \mu^2 \right\} = 0$$

és

$$\Delta t''_{24} = m \varepsilon \{+2 \mu^2 n^{-3} - 6 \mu^2 n^{-4}\}$$

$$\Delta t''_{24} = m \varepsilon \left\{ +\frac{2}{8} \mu^2 - \frac{6}{16} \mu^2 \right\} < 0$$

Tehát a $\Delta t_{24} = f(n)$ függvénynek az $n = 2$ helyen maximuma van és ott

$$\Delta t_{24} = \pm m \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{4} \right\} \quad 13.$$

Ha a P pont a P_A helyzetben van: $n = \infty$ és ha a P_B helyzetben van: $n = +1$. A 12.)-es képlet ebben az esetben

$$\Delta t_{24}^A = \Delta t_{24}^B = \pm m \varepsilon$$

$$[n = +1]$$

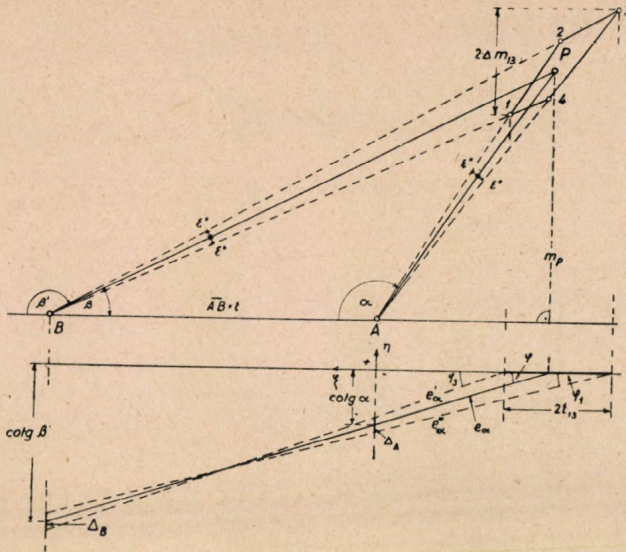
$$[n = \infty]$$

$$. 14.$$

Mint látjuk, a 12.) függvénynek az \overline{AB} -t felező merőlegesben ($n = 2$) maximuma van és az A , valamint a B felett ($n = +1$ és $n = \infty$) egyenlő értékű.

b) Vizsgáljuk meg Δt_{13} -t.

$$\Delta t_{13} = \frac{1}{2} (a_1 - a_3)$$



6. ábra.

A 7.) összefüggés alapján, de $\cotg \beta_n$ ' helyett $-\cotg \beta_n$ -t írva:
(6. ábra)

$$a_1 = t \frac{\cotg \alpha_n + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n}}{\cotg \alpha_n + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \cotg \beta_n + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n}} = t \frac{\cotg \alpha_n + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n}}{\mu + \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n} \right)}$$

$$a_3 = t \frac{\cotg \alpha_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n}}{\cotg \alpha_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \cotg \beta_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n}} = t \frac{\cotg \alpha_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n}}{\mu - \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n} \right)}$$

Az ε magasabb hatványait és egymással való szorzatait elhanyagoljuk és felhasználva a 8.) és 9.) összefüggéseket:

$$\Delta t_{13} = \pm m \varepsilon \{ 1 - (2 + \mu^2) n^{-1} + 3 \mu^2 n^{-2} - 2 \mu^2 n^{-3} \} \quad . \quad 15.$$

A Δt_{13} az $n=2$ helyen 0. Az $n=+1$ és $n=\infty$ helyen pedig $\pm m \varepsilon$.

Tehát

és

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_{24}^A &= \Delta t_{13}^A \\ \Delta t_{24}^B &= \Delta t_{13}^B \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 16.$$

Tehát összefoglalva:

A 13.) szerint: $\Delta t_{24} = \pm m \varepsilon \left(1 + \frac{\mu^2}{4}\right)$
 $[n = +2]$

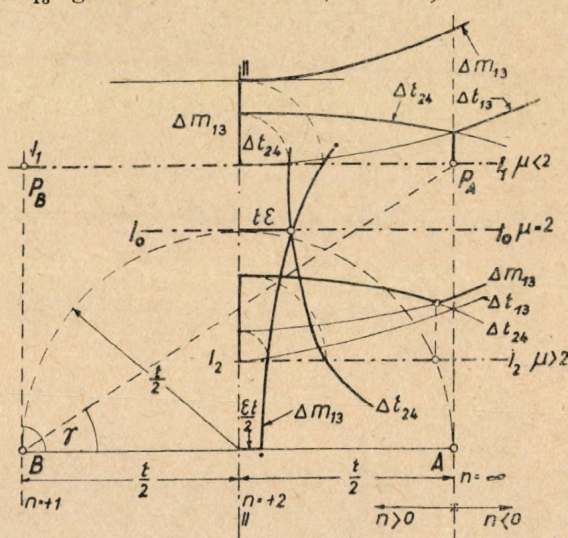
A 15.) alapján: $\Delta t_{13} = 0$
 $[n = +2]$

A 16.) szerint: $\Delta t_{24} = \Delta t_{13}$
 $[n = \infty]$

Mivel a Δt_{24} görbe a Δt_{13} -t a minket érdeklő szakaszon több helyen nem metszi, ezért kell, hogy ha $n < 0$ -nál:

$$\Delta t_{13} > \Delta t_{24}$$

Ebből következik, hogy amikor a P pont elhagyja a $P_A P_B$ ($n < 0$) szakaszt a Δt_{13} görbe a mértékadó. (7. ábra.)



7. ábra.

Szimmetria miatt a Δt_{13} görbének csak a II—II egyenestől jobbra eső szakaszával foglalkozunk.

c) Vizsgáljuk meg most azt, hogy Δm_{13} hogyan változik, ha a P pont a I—I egyenesen mozog.

$$\Delta m_{13} = \pm \frac{1}{2} (m_3 - m_1)$$

A 7.) formulák alapján:

$$m_3 = \frac{t}{\cotg(\alpha_n + \varepsilon'') - \cotg(\beta_n - \varepsilon'')} = \frac{t}{\cotg(\alpha_n + \varepsilon'') + \cotg(\beta_n + \varepsilon'')}$$

és

$$m_1 = \frac{t}{\cotg(\alpha_n - \varepsilon'') - \cotg(\beta_n + \varepsilon'')} = \frac{t}{\cotg(\alpha_n - \varepsilon'') + \cotg(\beta_n - \varepsilon'')}$$

Az 1.) alapján tudjuk, hogy (5. ábra)

$$t = m_p (\cotg \alpha_n + \cotg \beta_n)$$

$$\frac{1}{m_p} = \frac{\cotg \alpha_n + \cotg \beta_n}{t} = \operatorname{tg} \varphi$$

és analóg módon

$$\frac{1}{m_3} = \frac{\cotg (\alpha_n + \varepsilon'') + \cotg (\beta_n + \varepsilon'')}{t} = \operatorname{tg} \varphi_3$$

és

$$\frac{1}{m_1} = \frac{\cotg (\alpha_n - \varepsilon'') + \cotg (\beta_n - \varepsilon'')}{t} = \operatorname{tg} \varphi_1$$

ahol $\operatorname{tg} \varphi_3$ az e''_a és $\operatorname{tg} \varphi_1$ az e'_a egyenes iránytangense.

Tehát

$$m_3 - m_1 = \cotg \varphi_3 - \cotg \varphi_1 \quad 17.$$

amivel bizonyítva van az az állításunk, mely szerint a P pont bizonytalansága az e_a egyenes irányingadozásával arányos.

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{1}{t} \left\{ \cotg \alpha_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \cotg \beta_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n} \right\} =$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{1}{t} \left\{ \cotg \gamma - \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n} \right) \right\} = \frac{1}{t} \left\{ \mu - \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n} \right) \right\}$$

és hasonlóan

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{t} \left\{ \mu + \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta_n} \right) \right\}.$$

Az ε^2 -t elhanyagolva:

$$\Delta m_{13} = \frac{t}{\mu^2} \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{1}{\sin^2 \beta_n} \right\}.$$

Behelyettesítve a 10.) alatti értékeket és rendezve:

$$\Delta m_{13} = \pm \frac{t}{\mu^2} \varepsilon \{ 2 + u^2 (1 - 2n^{-1} + 2n^{-2}) \} \quad 18.$$

Szélső értéke Δm_{13} -nak ott van, ahol

$$\Delta m'_{13} = \frac{d \Delta m_{13}}{d n} = 0.$$

$$\Delta m'_{13} = \frac{t}{\mu^2} \varepsilon \{ \mu^2 (+2n^{-2} - 4n^{-3}) \}$$

$$[n=2] \quad \Delta m'_{13} = \frac{t}{\mu^2} \varepsilon \left\{ \mu^2 \left(2 \frac{1}{4} - \frac{4}{8} \right) \right\} = 0$$

és

$$\Delta m''_{13} = \frac{t}{\mu^2} \varepsilon \left\{ \mu \left(-4n^{-3} + 12n^{-4} \right) \right\}$$

$$\Delta m''_{13} = \frac{t}{\mu^2} \varepsilon \left\{ \mu^2 \left(-\frac{4}{8} + \frac{12}{16} \right) \right\} > 0.$$

Tehát a Δm_{13} függvénynek az $n = 2$ helyen minimuma van.

$$\Delta m_{13} = \frac{t}{\mu^2} \varepsilon \left\{ 2 + \mu^2 \left(1 - \frac{2}{2} + 2 + \frac{2}{4} \right) \right\} =$$

$$\boxed{\Delta m_{13} = \pm t \varepsilon \left\{ \frac{2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right\}} \quad \dots \dots \dots 19.$$

4. A P pont az AB -re merőleges egyenesen mozog.

Az $n = 2$ -höz tartozó \overline{AB} -re merőleges egyenest jelöljük $II-II$ -vel és vizsgáljuk azt, hogy Δt_{24} és a Δm_{13} milyen értékeket vesz fel, ha a P pont $II-II$ egyenesen mozog.

a) A Δt_{24} vizsgálata.

Feladatunk az, hogy megvizsgáljuk a 13.) jelű függvény szélső értékeit. A kettős előjeltől eltekintve a 13.) szerint:

$$\Delta t_{24} = m \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{4} \right\} = m \varepsilon + m \varepsilon \frac{t^2}{4m^2}$$

$$\Delta t_{24} = \varepsilon \left\{ m + \frac{t^2}{4} m^{-1} \right\} = f(m)$$

Szélső érték ott van, ahol

$$\Delta t'_{24} = \frac{d \Delta t_{24}}{d\bar{m}} = 0.$$

$$\Delta t'_{24} = \varepsilon \left\{ 1 - \frac{t^2}{4} m^{-2} \right\} = 0,$$

ha $m = \frac{t}{2}$.

Továbbá:

$$\Delta t'_{24} = \varepsilon \left\{ + 2 \frac{t^2}{4} m^{-3} \right\} > 0.$$

$$\left[m = \frac{t}{2} \right]$$

Tehát a Δt_{24} -nek az $m = \frac{t}{2}$ helyen minimuma van és ott:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta t_{24}^0 = \pm \varepsilon t. \\ [n=2] \\ \left[m = \frac{t}{2} \right] \end{array}} \dots \dots \dots 20.$$

A Δt_{24} függvénynek az $m = \frac{t}{2}$ helyen, vagyis ahol a t -re mint átmérőre rajzolt félkör metszi a $II-II$ egyenest, minimuma van. Ott tehát, ahol a metsző irányok egymással 90° -ot alkotnak.

A 13.) összefüggéssel jellemzett Δt_{24} görbe az $m = 0$ és $m = \infty$ helyen ∞ értéket vesz fel.

b) Vizsgáljuk Δm_{13} -t.

A 19.) szerint (a kettős előjeltől eltekintve):

$$\Delta m_{13} = t \varepsilon \left\{ \frac{2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right\} = \varepsilon \left\{ \frac{2m^2}{t} + \frac{t}{2} \right\}$$

$$\Delta m'_{13} = \frac{d \Delta m_{13}}{d m} = \varepsilon \frac{4m}{t}$$

$$\Delta m'_{13} = 0$$

$$[m=0]$$

és

$$\Delta m''_{13} = \varepsilon \frac{4}{t} > 0.$$

Tehát a Δm_{13} függvénynek az $m = 0$ helyen minimuma van és ott

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta m_{13} = \pm \varepsilon \frac{t}{2} \\ [n=2] \\ [m=0] \end{array}} \dots \dots \dots 21.$$

A t -re rajzolt félkör tetőpontján $m = \frac{t}{2}$ és ott

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta m_{13}^0 = \pm \varepsilon t \\ [n=2] \\ \left[m = \frac{t}{2} \right] \end{array}} \dots \dots \dots 22.$$

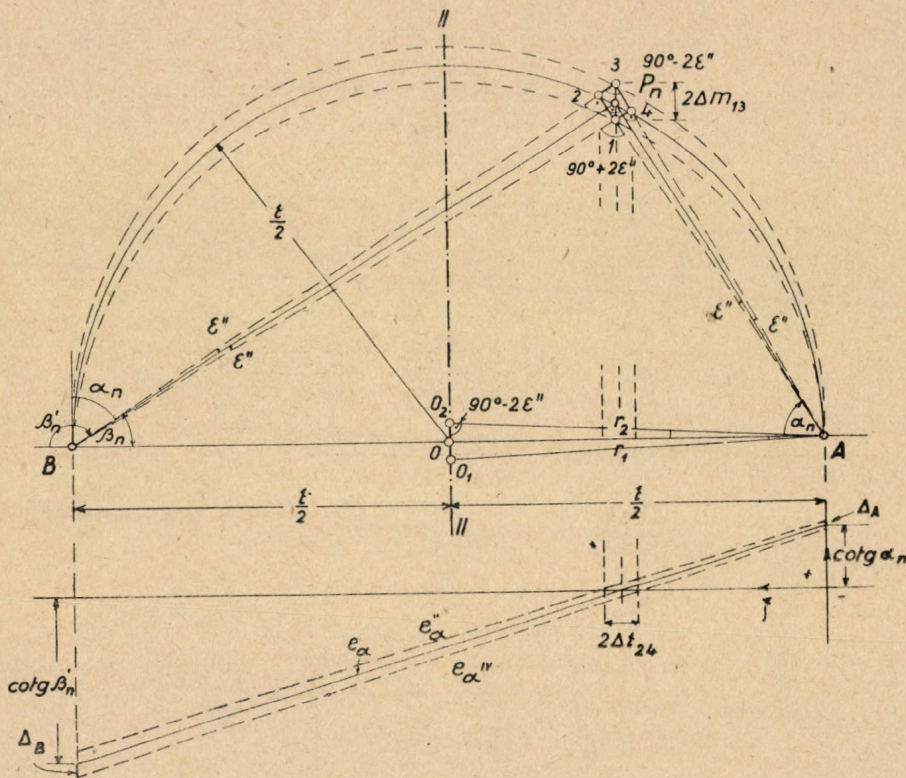
vagyis a 20.)-al összevetve, a t -re rajzolt félkör tetőpontján:

$$\boxed{\Delta t_{13}^0 = \Delta t_{24}^0}$$

A 7. ábra az $n = 2$ -höz tartozó Δt_{13} és Δt_{24} görbékét együtt tűnteti fel.

5. A P pont az AB -re mint átmérőre rajzolt körön mozog.

Vizsgáljuk meg, milyen értékeket vesz fel Δm_{13} és Δt_{24} ha a P pont az AB -re mint átmérőre rajzolt körön mozog. (8. ábra.)



8. ábra.

a) A Δm_{13} vizsgálata:

A 7.) alatti összefüggések alapján, figyelembe véve, hogy $\cotg \beta_n' - \cotg \beta_n$:

$$m_1 = \frac{t}{\cotg(\alpha_n - \epsilon'') + \cotg(\beta_n - \epsilon'')} = \frac{t}{\cotg \alpha_n + \cotg \beta_n + \left(\frac{\epsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\epsilon}{\sin^2 \beta_n} \right)}$$

$$m_3 = \frac{t}{\cotg(\alpha_n + \epsilon'') + \cotg(\beta_n + \epsilon'')} = \frac{t}{\cotg \alpha_n + \cotg \beta_n - \left(\frac{\epsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\epsilon}{\sin^2 \beta_n} \right)}$$

De mivel most:

$$\beta_n = 90 - \alpha_n$$

ezért

$$\cotg \beta_n = \tg \alpha_n$$

és

$$\sin \beta_n = \cos \alpha_n$$

Ennek megfelelően:

$$m_1 = \frac{t}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n + \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \alpha_n} \right)} = \frac{t}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n + \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_n} \right)}$$

és

$$m_3 = \frac{t}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n - \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \alpha_n} \right)} = \frac{t}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n - \left(\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_n} \right)}$$

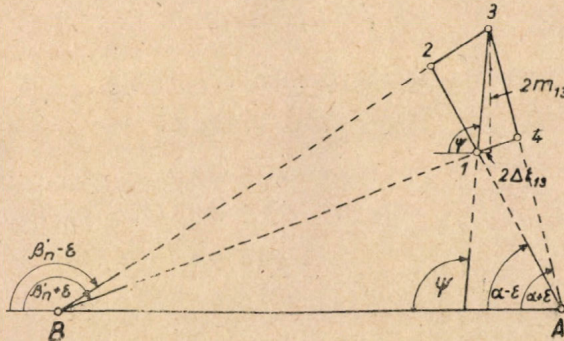
$$m_3 - m_1 = 2 \Delta m_{13} = \frac{t}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_n}} - \frac{t}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_n}} =$$

$$\Delta m_{13} = \pm \varepsilon t = \text{constans.}$$

23.

Tehát az \overline{AB} -re mint átmérőre rajzolt körön minden pont Δm_{13} hibája egymással egyenlő.

Vizsgáljuk meg az $\overline{I3}$ átló és az \overline{AB} egyenes hajlásszögét. A hibanégyyszög $\overline{I3}$ átlójának hajlásszögét a Hansen-feladatnál tárgyalandó



9. ábra.

27'.) képlet alapján számíthatjuk. A 27'.) képlet szerint a 9. ábra jelöléseivel, általános esetben:

$$\cotg \psi = \frac{\cotg (\alpha - \varepsilon) \cotg (\beta - \varepsilon) - \cotg (\alpha + \varepsilon) \cotg (\beta + \varepsilon)}{\cotg (\beta - \varepsilon) - \cotg (\alpha + \varepsilon) - \cotg (\beta + \varepsilon) + \cotg (\alpha - \varepsilon)}$$

$$\cotg \psi = \frac{\left(\cotg \alpha + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha} \right) \left(\cotg \beta + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta} \right) - \left(\cotg \alpha - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha} \right) \left(\cotg \beta - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta} \right)}{\cotg \beta + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta} - \cotg \alpha + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha} - \cotg \beta + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \beta} + \cotg \alpha + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha}}$$

A kijelölt műveleteket és a lehető egyszerűsítéseket elvégezve és az ε -al szorzott tagok egymással való szorzatát elhanyagolva:

$$\boxed{\cotg \psi = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)}} \quad 24.$$

Jelen esetben

$$\beta = \alpha + 90^\circ$$

ezért most

$$\cotg \psi = \frac{\sin 2\alpha + \sin (2\alpha + 180^\circ)}{2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)} = 0$$

$$\psi = 90^\circ,$$

azaz az $\overline{I3}$ átló α minden értékénél merőleges az \overline{AB} egyenesre.

Mostmár az $\overline{I3}$ átló hosszát is kiszámíthatjuk, ha ismerjük valamelyik vetületét és a ψ szöget. (12. ábra.)

$$\text{vagy} \quad \left. \begin{aligned} \overline{I3} &= \frac{2 \Delta m_{13}}{\sin \psi} \\ \overline{I3} &= \frac{2 \Delta t_{13}}{\cos \psi} \end{aligned} \right\} 25$$

b) Vizsgáljuk a Δt_{24} -t.

$$\Delta t_{24} = \frac{1}{2} (a_2 - a_4).$$

A 7.) összefüggés alapján figyelembe véve, hogy

$$\cotg \beta_n = -\cotg \beta_n$$

$$a_2 = t \frac{\cotg (\alpha - \varepsilon'')}{\cotg (\alpha - \varepsilon'') + \cotg (\beta_n + \varepsilon)}$$

és

$$a_4 = t \frac{\cotg (\alpha + \varepsilon'')}{\cotg (\alpha + \varepsilon'') + \cotg (\beta - \varepsilon)}$$

de most is

$$\cotg \beta_n = \tg \alpha_n \quad \text{és} \quad \sin \beta_n = \cos \alpha_n$$

tehát

$$a_2 = t \frac{\cotg \alpha_n + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n}}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n - \left(\frac{\varepsilon}{\cos^2 \alpha_n} - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} \right)}$$

és

$$a_4 = t \frac{\cotg \alpha_n - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n}}{\cotg \alpha_n + \tg \alpha_n + \left(\frac{\varepsilon}{\cos^2 \alpha_n} - \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha_n} \right)}$$

Az ε^2 -t elhanyagolva

$$\Delta t_{24} = \pm 2 t \varepsilon \sin \alpha_n \cos \alpha_n \quad 26.$$

Ennek minimuma nyilván az $\alpha_n = 90^\circ$ helyen van, ahol

$$\Delta t_{24} = 0.$$

$$[\alpha_n = 90^\circ]$$

A kör tetőpontján, amikor $\alpha_n = 45^\circ$,

$$\Delta t_{24}^\circ = \pm t \varepsilon,$$

ami összhangban van a 20.) alatti eredménnyel.

A hibanégyszög 2 és 4 pontja ugyanazon a körön van, mint a P pont, mert mindkettőnél a kerületi szög: $\frac{\pi}{2}$. (8. ábra.) Mivel a $\overline{24}$ átlóhoz, mint húrhoz mindig $2\varepsilon''$ kerületi szög tartozik, ezért kell, hogy a hibanégyszög átlójának hossza a kör mentén konstans legyen.

Ha ez így van, akkor kell, hogy pl. a kör tetőpontján:

$$\overline{24} = 2 \Delta t_{24}^\circ = 2 t \varepsilon \text{ legyen.}$$

Tudjuk, hogy $2\varepsilon''$ kerületi szöghöz $4\varepsilon''$ középponti szög tartozik, tehát a $\overline{24}$ húr a következőképpen számítható (8. ábra):

$$\overline{24} = \frac{t}{2} 4 \varepsilon = 2 t \varepsilon,$$

ami egyezik a fenti feltevessel.

A $\overline{24}$ átló hossza mindig konstans azon kör mentén, amelyiket az A , B és P pontok meghatároznak. Ennek alapján a $\overline{24}$ átló mindig számítható. Ha a P pontnál lévő szöget γ -val, az A , B és P -re rajzolható körsugarát r -rel jelöljük, akkor

$$r = \frac{\overline{AB}}{2 \sin \gamma}$$

és

$$\overline{24} = 4 r \varepsilon$$

6. Az eredmények összefoglalása.

Az előmetszés vizsgálatánál kapott eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze.

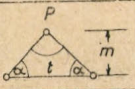
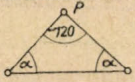
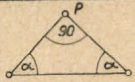
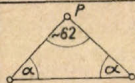
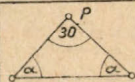
1. Ha $m_p > \frac{t}{2}$ (azaz $\mu < 2$), akkor a P pont legkedvezőbb helyzetét a II—II szimmetria egyenes jelöli ki. (7. ábra.) Tehát, ha a P pontnál lévő szög hegyesszög, akkor a legkedvezőbb előmetszési alakzat az egyenlőszárú háromszög.

2. Ha $m_P < \frac{t}{2}$ (azaz $\mu > 2$), akkor mivel a Δt_{24} és Δm_{13} görbék metszik egymást, az optimális helyzet az lesz, amelynél a

$$\Delta m_{13} = \Delta t_{24},$$

azaz ahol e két görbe metszi egymást. De megállapítottuk, hogy ezt a feltételt az AB átmérőjű kör minden pontja kielégíti, tehát ha a P pontnál lévő szög tompaszög, akkor az AB átmérőjű kör jelöli ki a P pont legkedvezőbb helyzetét.

Összehasonlítással kiszámítottuk néhány háromszögre Δt_{24} és Δm_{13} értékét, amelyek egyben a e háromszögekből számított P pont a priori hibáinak is tekinthető.

|  | $t = 1000m$ és $\varepsilon = \pm 5''$ | | |
|--|--|--------------------|--------------------|
| | $\frac{t}{m} = \mu$ | $\Delta m_{13} mm$ | $\Delta t_{24} mm$ |
|  | $\frac{t}{m} = 4$ | ± 15 | ± 30 |
|  | $\frac{t}{m} = 2$ | ± 24 | ± 24 |
|  | $\frac{t}{m} = 1$ | ± 60 | ± 30 |
|  | $\frac{t}{m} = \frac{1}{2}$ | ± 204 | ± 510 |
| $\Delta t_{24} = \pm t \varepsilon \left(\frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{4} \right)$ és $\Delta m_{13} = t \varepsilon \left(\frac{2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right)$ | | | |

1. táblázat

Az előbbi két eredményből és az 1. táblázatból most már az alábbi következtetéseket fogalmazhatjuk meg a gyakorlat számára.

Az előmetszés legkedvezőbb eredményt akkor ad, amikor a P pontnál lévő szög derékszög.

Ha ez a szög hegyesszög, akkor szimetriára törekedjünk.

Kedvezőbb eredményt ad a tompaszögű, mint a hegyesszögű előmetszés.

Minden esetben tartózkodjunk az olyan előmetszéstől, melynél a P pont az A és B pontok merőlegesén kívül esik.

IV. Hansen-féle páros pontkapcsolás.

A Hansen-feladatnál adva van A és B pont koordinátaival és mérés által ismeretes a meghatározandó I ponton a α , és β_1 , valamint a meghatározandó 2 ponton α_2 és β_2 szögek. (12. ábra.)

Az ismeretlen pontokat úgy határozzuk meg, hogy a φ szög segítségével az $\overline{I2}$ irány tájékozási szögét kiszámítjuk, majd pedig a mért

szögekkel meghatározzuk az \overline{IA} , \overline{BI} valamint a $\overline{A2}$ és $\overline{B2}$ irányok tájékozási szögét és ezzel a feladatot előmetszésre vezettük vissza. Az előmetsző irányok megbízhatósága egyenlő lesz a φ szög megbízhatóságával. Vizsgálataink során az A és B pontot hibátlannak tételezzük fel.

1. A Hansen-féle pontkapcsolás megoldása.

A 12. ábrát a 2. ábrával összehasonlítva megállapítható, hogy a Hansen-féle páros pontkapcsolás a 2. ábrán bemutatott konfigurációnak az a speciális esete, melynél $1' \equiv 1$ és $2' \equiv 2$ ponttal. Ebben az esetben $t_1' = 0$ és $t_2 = t_3 = t$. Ennek megfelelően a 3. formula a következőképpen egyszerűsödik

$$\cotg \varphi = \frac{(\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_1) \cotg \beta_1 - (\cotg \beta_2 - \cotg \beta_1) \cotg \alpha_1}{(\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_1) - (\cotg \beta_2 - \cotg \beta_1)} \quad 27.$$

Ez az eredmény egyezik *M. Miller*¹ képletével, ha pedig a kijelölt műveleteket és a lehető egyszerűsítéseket elvégezzük, akkor *Sossna*² képletét kapjuk. Mindketten egymáshoz hasonló, de a mienktől teljesen eltérő úton vezették le formuláikat.

$$\cotg \varphi = \frac{\cotg \alpha_2 \cotg \beta_1 - \cotg \alpha_1 \cotg \beta_2}{(\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_1) - (\cotg \beta_2 - \cotg \beta_1)} \quad 27'.$$

Sossna és *M. Miller* az \overline{AB} és e egyenes hajlásszögének tangensét határozta meg, de mivel a tételünk a szögek cotangensére vonatkozik, másrésről mivel — jó konfiguráció esetén — $\varphi 90^\circ$ vagy ahhoz közelálló tompaszög, márpedig $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$, megmaradunk $\operatorname{ctg} \varphi$ -nél.

2. A Hansen-féle pontkapcsolás megbízhatósága.

Mint már említettük, e feladatnál először kiszámítjuk a φ szöget, majd pedig a pontokat előmetszéssel határozzuk meg. Ebből következik, hogy a Hansen kapcsolás akkor jó, ha φ -t kis hibával számíthatjuk és a pontokat kedvező alakú előmetszéssel határozhatjuk meg.

Jelöljük ε''_φ -vel a φ szög ingadozását és ε'' -al a mért szögek hibáját.

A 6. formula alapján felírhatjuk, hogy (10. ábra)

$$\cotg (\varphi + \varepsilon''_\varphi) = \cotg \varphi - \frac{0,0000048 \varepsilon''_\varphi}{\sin^2 \varphi} \quad \dots \quad a)$$

Az $\varepsilon''_\alpha 0$ helye A' ponthoz, az $\varepsilon''_\beta 0$ helye B' ponthoz tartozik, ezért az ε''_α és ε''_β egyenesek metszéspontja az $\overline{A'B'}$ egyenes $\varphi + \varepsilon''_\varphi$ hajlásszögének cotangensét adja.

¹ Zeitschrift f. Vermessungswesen LXXII. (1943) évf. 88. o.

² Z. f. V. XXV. (1896) évf. 361. o.

$$\cotg(\varphi + \varepsilon''_{\varphi}) =$$

$$= \frac{\cotg \alpha'_2 \cotg \beta'_1 = \cotg \alpha_1 \cotg \beta_2}{(\cotg \alpha'_2 - \cotg \alpha_1) - (\cotg \beta_2 - \cotg \beta'_1)} + \varepsilon \frac{\frac{\cotg \beta_1}{\sin^2 \alpha_2} + \frac{\cotg \alpha_2}{\sin^2 \beta_1} + \frac{\cotg \beta_2}{\sin^2 \alpha_1} + \frac{\cotg \alpha_1}{\sin^2 \beta_2}}{-\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_1 - \cotg \beta_2 - \cotg \beta_1}$$

$\cotg \varphi$ Q

Felhasználva az $a)$ alatti összefüggést:

$$\cotg \varphi - \frac{\varepsilon_{\varphi}}{\sin^2 \varphi} = \cotg \varphi + \varepsilon Q$$

$$\boxed{\varepsilon''_{\varphi} = -\varepsilon'' Q \sin^2 \varphi = n \varepsilon''} \quad 28.$$

ahol

$$n = \frac{\frac{\cotg \beta_1}{\sin^2 \alpha_2} + \frac{\cotg \alpha_2}{\sin^2 \beta_1} + \frac{\cotg \beta_2}{\sin^2 \alpha_1} + \frac{\cotg \alpha_1}{\sin^2 \beta_2}}{-\cotg \beta_2 - \cotg \beta_1 - \cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_1} \sin^2 \varphi.$$

A 28.)-as formula segítségével meg lehet bírni egy Hansen-kapcsolást, illetve előre is meg lehet állapítani, hogy a mérendő szögeket milyen pontossággal kell mérni ahhoz, hogy a φ szög a cél-nak megfelelő pontos legyen. Az utóbbi esetben a képletben szereplő szögeket elég közelítően meghatározni, mert az n -t elég kerek egész számra számítani.

Most vizsgálni fogjuk a legkedvezőbb Hansen kapcsolás feltételeit.

$a)$ Adva A és B ismert alappont és P_1, P_2 a meghatározandó pontok. Legyen mind a négy pont azon a körön, melynek \overline{AB} és $\overline{P_1 P_2}$ két egymásra merőleges átmérői. (11. ábra.)

Ebben az esetben $\varphi = 90^\circ$ és $\sin^2 \varphi = 1$, továbbá

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ és β_2 szögek 45° -ak.

Igy

$$Q = \frac{\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5}}{-1 - 1 - 1 - 1} = \frac{-8}{4} = -2$$

Tehát

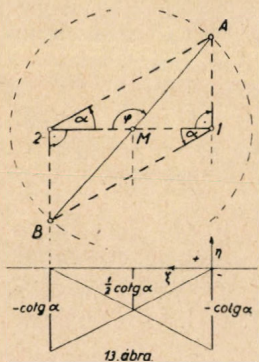
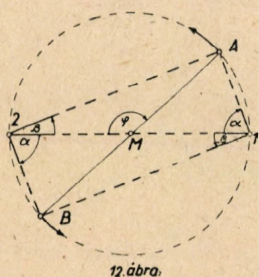
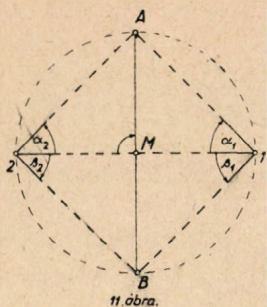
$$\varepsilon''_{\varphi} = 2 \varepsilon''$$

vagyis a φ szöget kétszerakkora hibával számíthatjuk, mint amekkorát a mérésben elkövettünk. Az előmetszés szempontjából ez a kapcsolás tökéletes.

$b)$ Az előbbi alakzatot vizsgáljuk meg általános esetben. (12. ábra.)

Az \overline{AB} átmérő az M pont körül forogjon és vizsgáljuk meg, mekkora φ szögnél kapjuk φ legpontosabb értékét. A 28.) képletben szereplő szögek most a következőképpen alakulnak:

$$\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = +\beta, \alpha_2 = +\beta \text{ és } \beta_2 = \alpha,$$



továbbá $\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$, $\sin \beta = \cos \alpha$, végül $\varphi = 2\alpha$.

A 28.) szerint:

$$\varepsilon''_{\varphi} = -\varepsilon \sin^2(2\alpha) Q$$

$$\varepsilon''_{\varphi} = -\varepsilon \sin^2(2\alpha) \frac{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin^2 \alpha}}{-\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha} =$$

$$\varepsilon''_{\varphi} = +\varepsilon \sin^2(2\alpha) \frac{2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

Tehát

$$\varepsilon''_{\varphi} = \pm \varepsilon'' \{4 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\} \quad 29.$$

Az ε''_{φ} -nek minimuma ott van, ahol $8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ -nak maximuma van, azaz, ha $\alpha = 45^\circ$.

Ebben az esetben:

$$\varepsilon''_{\varphi} = \pm \varepsilon'' \{4 - 8 \times 0.5 \times 0.5\} = \pm 2 \varepsilon''.$$

Ez az eredmény egyezik az a) alakzatra kapott értékkel és azt mondja, hogy a φ pontossága tekintetében az a) eset a legkedvezőbb, ha az A, B és P_1 , P_2 ugyanazon kör átmérői.

c) Vegyük fel a 13. ábra-beli esetet. Legyen

$$\alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \beta_1 = 45^\circ \text{ és } \beta_2 = 90^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = +2 \text{ és } \sin^2 \varphi \approx 0.8.$$

$$Q = \frac{\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5} + 0 + 0}{-1 - 0 - 0 - 1} = -2$$

$$\varepsilon''_{\varphi} = -0.8 \times -2 \times \varepsilon'' \approx +1.6 \varepsilon''.$$

A φ meghatározása szempontjából ez az eset jobb, mint az a) eset, de az előlemszés szempontjából rosszabb.

d) Vizsgáljuk meg az a) esetnek egy változatát, amikor P_1 a kör középpontja (14. ábra).

Most

$$Q = \frac{\frac{\operatorname{cotg} \alpha_2}{1} + 0 + 0 + \frac{\operatorname{cotg} \beta_2}{1}}{-\operatorname{cotg} \beta_2 - 0 - 0 - \operatorname{cotg} \alpha_2} = -\frac{\operatorname{cotg} \alpha_2 + \operatorname{cotg} \beta_2}{\operatorname{cotg} \alpha_2 + \operatorname{cotg} \beta_2} = -1$$

Tehát

$$\varepsilon''_{\varphi} = -\varepsilon \sin^2 \varphi Q = \varepsilon''.$$

Ebben az esetben α_2 és β_2 minden értékénél (de $\varphi = 90^\circ$) a szöget a mérésrel egyező pontossággal számíthatjuk.

e) Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, melynél az \overline{AB} távolság nő. (15. ábra.)

Legyen $m_A = m_B = m$ és az m növekedjék 0-tól ∞ -ig.

Az A és B pont szögmérésből származó Δt_{24} hibáját a 13.) formula segítségével számíthatjuk:

$$\Delta t_{24} = \pm m \varepsilon \left(1 + \frac{\mu^2}{4} \right)$$

A φ hibáját jelöljük ε''_{φ} -vel:

$$\varepsilon''_{\varphi} = \pm \frac{2 \Delta t_{24}}{2m} = \pm \varepsilon \left(1 + \frac{\mu^2}{4} \right) =$$

$$\boxed{\varepsilon''_{\varphi} = \pm \varepsilon \left\{ 1 + \left(\frac{t}{2} \right)^2 \frac{1}{m^2} \right\}} \quad . . \quad 30.$$

Mint látjuk, a φ hibája az m növekedésével csökken. Az $m = \frac{t}{2}$ helyén:

$$\varepsilon''_{\varphi} = \pm \varepsilon \left\{ 1 + \left(\frac{t}{2} \right)^2 \left(\frac{2}{t} \right)^2 \right\} = \pm 2 \varepsilon,$$

ami egyezik az a) esetről kapott eredménnyel. Ha $m = \infty$, akkor $\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon$, vagyis az m növekedésével csökken. ε_{φ}

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a 28.) formulában szereplő Q tényező alapján vizsgáljuk ezt az esetet. A szimmetria miatt most minden szög α , és ezért a Q tényező most a következőképpen alakul:

$$Q = \frac{\frac{\cotg \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cotg \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cotg \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cotg \alpha}{\sin^2 \alpha}}{-4 \cotg \alpha} = -\frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

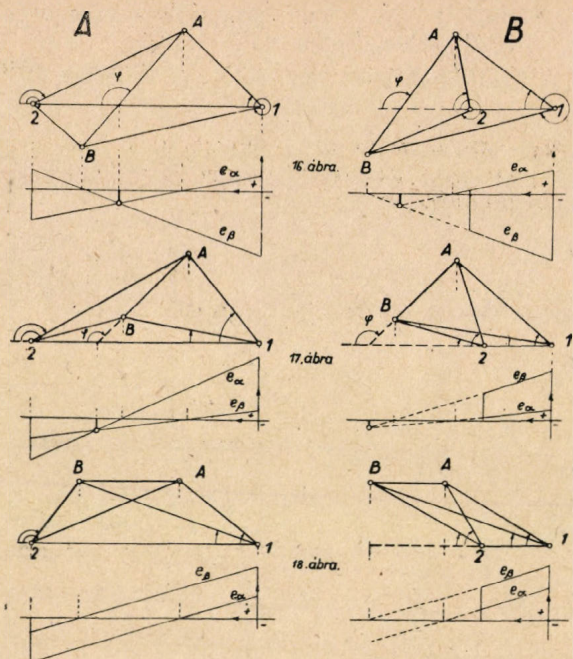
és így

$$\boxed{\varepsilon''_{\varphi} = -\frac{\varepsilon''}{\sin^2 \alpha}} \quad 30'.$$

Tehát az α növekedésével ε_{φ} közeledik ε -hoz és ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon$. Ha $\alpha = 45^\circ$

$$\varepsilon_{\varphi} = \pm 2 \varepsilon.$$

Ezután rátérhetünk a Hansen kapcsolat különböző alapeseteinek megbírálására.



A 16. ábrán jelölt alakzat jó, ha az előmetszés irányai közel 90° -ak és a B esetben 2 pont az M -hez lehetőleg közel van.

A 17. alakzat A változata még elfogadható, ha egyébként az előmetsző irányok metszőszöge nem nagyon tér el a 90° -tól. A B változata csak akkor megfelelő, ha 2 pont az M közelében van és a metsződő irányok nem túl hegyesek.

Ha $\overline{AB} // e$, vagy közel párhuzamos vele (18. ábra), akkor az e_α és e_β egyenes vagy nem, vagy túl hegyes szögben metszi egymást, tehát a φ segédző meg határozása rendkívül bizonytalaná válik. Ez az eljárás ebben a szélső esetben nem alkalmazható.

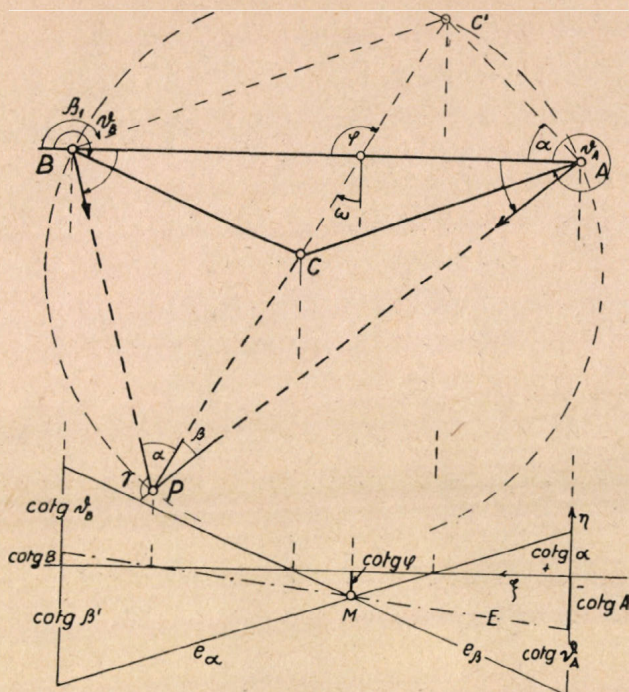
Általában az A változatok a jobbak, mert azoknál a $\cotg \varphi$ -t meghatározó metszéspont a mért ordináták közé esik, míg a B változatoknál ez a metszéspont az e_α és e_β egyenesek extrapolált részén van.

V. Hátrametszés.

A hátrametszés geometriailag két kör metszéspontja, analitikailag két másodfokú egyenlet közös gyökének meghatározása. Az első esetben az egyik metszéspont C , a második esetben az egyik gyök ismert. Végtelen sok megoldás van, ha P pont az A , C és B pontokon átmenő ú. n. „veszélyes körön” van. (19. ábra.)

Ennél a pontkapcsolásnál adva van A , B és C pont koordinátaival és mérjük a P ponton α és β szöget.

Ha a hátrametszést a Collins-féle C' segédponttal kiegészítjük, akkor a középső irány tájékozó szögét a φ szög segítségével meghatározhatjuk és ezzel a feladat előmetszésre van visszavezetve.



19. ábra.

A φ szöget pedig az A, B és C C' pontok által alkotott Hansen alakzathból számíthatjuk.

Tételünk alkalmazásával a φ szög számítása nélkül is meghatározhatjuk az A és B szögeket. Mielőtt erre a számításra rátérnénk, bemutatjuk, hogy a 27.) formula alkalmazása a Collins-ponttal kiegészített hátrametszésre a Delambre³-féle eredményre vezet.

Legyen adva A, B és C pont koordinátaival abban a rendszerben, amelynek y tengelye az \overline{AB} egyenes és x tengelye egy rá merőleges tetszőleges egyenes. (19. ábra.) Tételünk a φ szögre, Delambre képlete az ω szögre vonatkozik.

Mivel $\varphi = 90^\circ + \omega$
azért

$$\cotg \varphi = -\operatorname{tg} \omega.$$

A 27.) szerint a 19. ábra jelöléseivel:

$$\cotg \varphi = \frac{(-\cotg \vartheta_A)(-\cotg \alpha) - (\cotg \beta)(-\cotg \vartheta_B)}{-\cotg \alpha - \cotg \beta - (-\cotg \vartheta_B + \cotg \vartheta_A)}$$

de

$$\cotg \vartheta_A = \frac{Y_C - Y_A}{X_C} \quad \text{és} \quad \cotg \vartheta_B = \frac{Y_B - Y_C}{-X_C}$$

³ Delambre: Méthodes Analytiques Pour la Determination D'Un Arc du Meridien. 1799.

Most már

$$\begin{aligned}\cotg \varphi &= \frac{-\cotg \alpha \frac{Y_A - Y_C}{X_C} - \cotg \beta \frac{Y_B - Y_C}{+X_C}}{-\cotg \alpha - \cotg \beta - \left(\frac{Y_B - Y_C}{+X_C} + \frac{Y_C - Y_A}{+X_C} \right)} = \\ \cotg \varphi &= \frac{-\cotg \alpha (Y_B - Y_C) - \cotg \beta (Y_C - Y_A)}{-X_C \cotg \alpha - X_C \cotg \beta (Y_B - Y_C) - (Y_C - Y_A)} = \\ \cotg \varphi &= \frac{-\cotg \alpha (Y_B - Y_C) - \cotg \beta (Y_C - Y_A)}{-X_C \cotg \alpha - X_C \cotg \beta - (Y_B - Y_A)}.\end{aligned}$$

Deiambre szerint (19. ábra):

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{(Y_B - Y_C) \cotg \alpha + (Y_A - Y_C) \cotg \beta + (X_B - X_A)}{(X_B - X_C) \cotg \alpha + (X_A - X_C) \cotg \beta - (Y_B - Y_A)}$$

tehát most

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{(Y_B - Y_C) \cotg \alpha + (Y_A - Y_C) \cotg \beta}{-X_C \cotg \alpha - X_C \cotg \beta - (Y_B - Y_A)} = -\cotg \varphi,$$

amivel állításunk bizonyítva van.

A hátrametszés megoldása.

Mint már említettük, a Collins-ponttal kiegészített hátrametszésnél a Hansen kapcsolatnál levezetett 27.) képlet alkalmazható, ugyanis az α , β , valamint ϑ_A , ϑ_B szögek segítségével az e_α és e_β egyenesek előállíthatók és ezek metszéspontja adja $\cotg \varphi$ -t. (19. ábra.)

De tudjuk, hogyha ismernénk az A és B szögeket, akkor azok cotagensével elő volna állítható a ξ , η rendszerben egy olyan E egyenes, melynek az M ponton kell átmenni, mert a P pont is a $\overline{CC'}$ egyenesen van.

A 19. ábrából felírható tehát, hogy

$$\frac{\cotg \alpha - \cotg \vartheta_A}{\cotg \beta - \cotg \vartheta_B} = u = \frac{\cotg \alpha - \cotg A}{\cotg \beta - \cotg (\gamma - A)} \quad \dots \quad a)$$

Az $a)$ egyenlőségbe behelyettesítve a

$$\cotg (\gamma - A) = \frac{\cotg \gamma \cotg A + 1}{\cotg A - \cotg \gamma}$$

értékét kapjuk, hogy

$$\cotg \alpha - \cotg A - \mu \cotg \beta - \mu \frac{\cotg \gamma \cotg A + 1}{\cotg A - \cotg \gamma} = 0.$$

Közös nevezőre hozva és rendezve:

$$\begin{aligned}\cotg^2 A + (\pm \cotg \alpha + \mu \cotg \beta \pm \cotg \gamma + \mu \cotg \gamma) \cotg A + \\ + (\pm \mu \cotg \beta \cotg \gamma + \cotg \alpha \cotg \gamma + \mu) = 0 \\ \cotg^2 A + b \cotg A + c = 0\end{aligned}$$

Tehát

$$\boxed{\begin{aligned} \cotg A &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \\ \text{és} \\ -\cotg B &= \frac{\cotg \alpha - \cotg A}{\mu} - \cotg \beta \end{aligned}} \quad 31.$$

ahol

$$\mu = \frac{\cotg \alpha - \cotg \vartheta_A}{\cotg \beta - \cotg \vartheta_B},$$

és

$$b = \mu (\cotg \beta + \cotg \gamma) - \cotg \alpha - \cotg \gamma,$$

$$c = \mu + \cotg \alpha \cotg \gamma - \mu \cotg \beta \cotg \gamma.$$

A $\cotg A$ két értéke közül mindig a $\cotg \alpha$ signumával ellentétest kell választani, mert a P és C' pont az \overline{AB} egyenesnek nem lehet ugyanazon oldalán. Az A és B szögek segítségével a P pont előmetszéssel meghatározható.

Felhasznált irodalom

a lábjegyzetben említetteken kívül:

- Dr. W. Jordan:* Hdb. der Vermessungskunde I. Band. (1888.)
O. Eggert: Die Genauigkeit der Punktbestimmung durch Hansens problem.
Oltay K.: Geodézia I—IV.
Dr. Pinkwart: Zur Fehlertheorie der Trigonometrischen Punktbestimmung. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1940. 377. old.)
Dr. Pinkwart: Die Genauigkeit der Trig. Punktbest. (Z. f. V. 1940. 481 és 514. o.)
Dr. Szentmártony T.: Felsőbb mennyiségtan:

Szemle.

Relatív nehézséggyorsulás-mérések Svédországban 1941—47-ben.

Bror Wideland cikke a Balti Geodéziai Bizottság 1948-as kiadványában.

A Rikets Allmänna Kartverk 1941-ben kezdte meg az ország nehézségierő viszonyainak rendszeres meghatározását. 1941—42. években 40 ponton mértek nehézséggyorsulást az ország különböző helyein, Sterneck-féle ingákkal, melyet a Finn Geodéziai Intézettől kölcsönöztek ki. Az állomásokon nyert értékek középhibái 1941-ben ± 1.4 mgal, 1942-ben ± 1.5 mgal értékűek voltak.

1943-tól kezdve graviméterrel végezték a méréseket. A munkatervet a Vízrajzi Intézettel és a Svéd Geológiai Felügyelőséggel egyetértésben dolgozták ki. A tervnek megfelelően a meghatározandó pontokat úgy válogatták meg, hogy ezek mintegy 20 km távolságban voltak egymástól. Egyes tájakon, hol a geológiai szempontoknak különleges érdekei voltak, a hálózat pontjainak sűrűségét tetemesen megnövelték.

1943—1947. években 14 munkahónap alatt mintegy 1700 pontot határoztak meg. A mérések, a Lapp-föld hegyvidékének kivételével, behálózták az egész országot. Az elmaradt részeket 1948 folyamán fejezték be.

1943 óta a méréseket Nörgaard graviméterével végezték.

Általános vélemény, hogy ez a készülék kiváltképpen alkalmas egész országok gravitációs hálózatainak méréseire. Gyorsan lehet vele dolgozni és pontossága geodéziai célokra több, mint kielégítő. A műszernek nincs termosztátja, az észlelt értékeket hőmérsékleti javítással kell ellátni. Az ú. n. működési hőmérsékletet, vagyis azt, melynél a műszer a hőmérséklet szempontjából helyes értékeket szolgáltat, minden esetben újonnan kell meghatározni, ha a folyadékot cseréljük, vagy ez megváltoztatja összetételét. A működési hőmérséklet hosszú időközökben nem marad állandó, ezért azt legalább a mérési kampány elején és végén mindig meg kell határozni. A hőmérsékleti javítás egyenlete is csupán a működési és tényleges hőmérséklet differenciájának bizonyos értékéig állandó. A különbség nem lehet nagyobb 15°C -nál, nagyobb különbségek esetében az eredmények szabotossága csökken. Az évek folyamán használt műszernél azt találtuk, hogy $+30^{\circ}$ -nál már nagymértékű a pontatlanság és független a működési és tényleges hőmérséklet különbségének nagyságától. Ez a bizonytalanság abban a tényben nyilvánul, hogy a műszer napi állandója erős melegekben természetellenesen nagy. Ha a műszer nyugalomban van, az állandó mindig pozitív és kb. egy mgal körül mozog naponként. Mezei munkánál az állandó szabályszerűen változik és esetenként negatív értéket is felvehet. Nagy melegben az állandó napi ingadozása több mgalt tesz ki. Ezért a nyári időszak épúgy nem alkalmas a mérések végrehajtására, mint az őszi, mikor a hőmérséklet napközben erősen változik. Kedvező hőmérsékleti viszonyok között megismételt mérések egészen eltérő eredményt szolgáltatnak a nyári mérésekhez képest, pl. Bastuträsk és Lulea gravitációs értéke 1946 szeptemberében 103,7 mgalnak adódott, 1947-ben három független mérés eredményei 101,4, 101,5 és 102,3 mgal voltak.

A műszerállandó bizonytalansága a mérések különleges berendezését teszi szükségessé. Elsősorban néhány főalappontot kell meghatározni, melyeket az ország egész területén célszerűen helyezünk el és ezeket szélső pontossággal határozzuk meg. A fő alappontok az egyes mérési vidékeken referencia állomásul szolgálnak. A mérések mindennap a referencia állomáson kezdődnek és végződnek. A reggeli és az esti értékek különbségét, melyek részben a pillanatnyi állandó változásából, részben az elkerülhetetlen észlelési hibákból származnak, az idővel arányosan osztjuk el az egyes részletpontokon. Tehát az állandó változását lineárisnak tételezzük fel. Az eljárás helyes akkor, ha a változás csekély, de ha a változás tetemes, célszerű a referencia állomáson naponta több ízben észlelni.

A főpontok meghatározását úgy hajtják végre, hogy egy ismert g értékű pontról, lehető legrövidebb idő alatt, oda-visszamérést végeznek. Ellenőrzés céljából a méréseket különböző körülmények között megismétlik s az így nyert eredményeket kiegyenlítik. A Svédországban végzett nagytömegű mérésekből a következő középhibák vezethetők le:

| | | | | |
|----------|-----|-------------|------------|------|
| 1943-ban | 652 | észlelésből | $\pm 0,14$ | mgal |
| 1944-ben | 529 | „ | $\pm 0,15$ | „ |
| 1945-ben | 354 | „ | $\pm 0,15$ | „ |
| 1946-ban | 476 | „ | $\pm 0,16$ | „ |
| 1947-ben | 319 | „ | $\pm 0,20$ | „ |

A legtöbb ingával meghatározott állomást később graviméterrel is bemérték. 39 állomás átlagos eltérése 1,8 mgal.

Az ingával nyert középérték középhibája $\pm 1,5$ mgal.

Nörgaard újonnan szerkesztett graviméterét Svédország általános gravitáció méréseiben használták elsőízben nagykiterjedésű összefüggő területeken.

Kürti Vilmos.

Ilmari Bonsdorff professzor, a Balti Geodéziai Bizottság elnöke és a Finn Geodéziai Intézet igazgatója ez évben ünnepi 70-ik születése napját. Az évforduló alkalmából a vezetése alatt álló intézet gazdag és értékes tartalmú emlékkönyvet adott ki, mint a Finn Geodéziai Intézet 36. számú közleményét. A 262 oldalra terjedő kötetben a geodéziának 26 nemzetközi kiválósága írt cikket. A díszes névsorban Magyarországot Oltay professzor képviseli. A cikkek közül néhányat rövid tartalmi kivonatban ismertetünk.

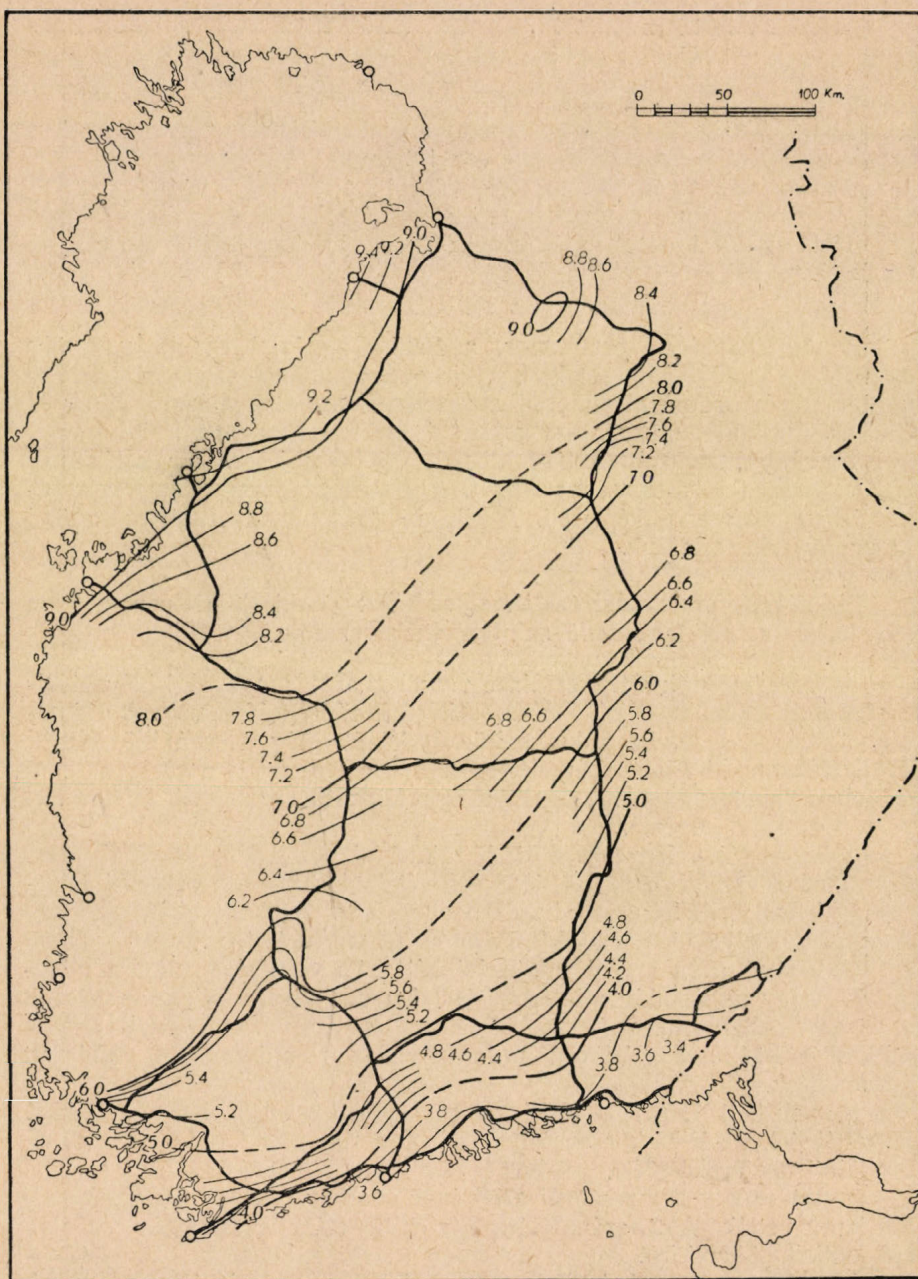
Adatok a finnországi talajemelkedéshez. (Erki Kääriäinen, a Finn Geodéziai Intézet felsőrendű szintezésének vezetője.)

A szárazföldnek a tengerszínre vonatkoztatott magassági helyzetváltozása két, ugyanazon a vonalon, szilárd kötéppontokkal végzett szintezésből vezethető le, ha a két szintezés között elég hosszú idő telt el. T. J. Kukkamäki Finnország déli részének emelkedését a régi és az új szintezés magasságkülönbségeiből egy közelítő számítási módszerrel vezette le és térképezte.

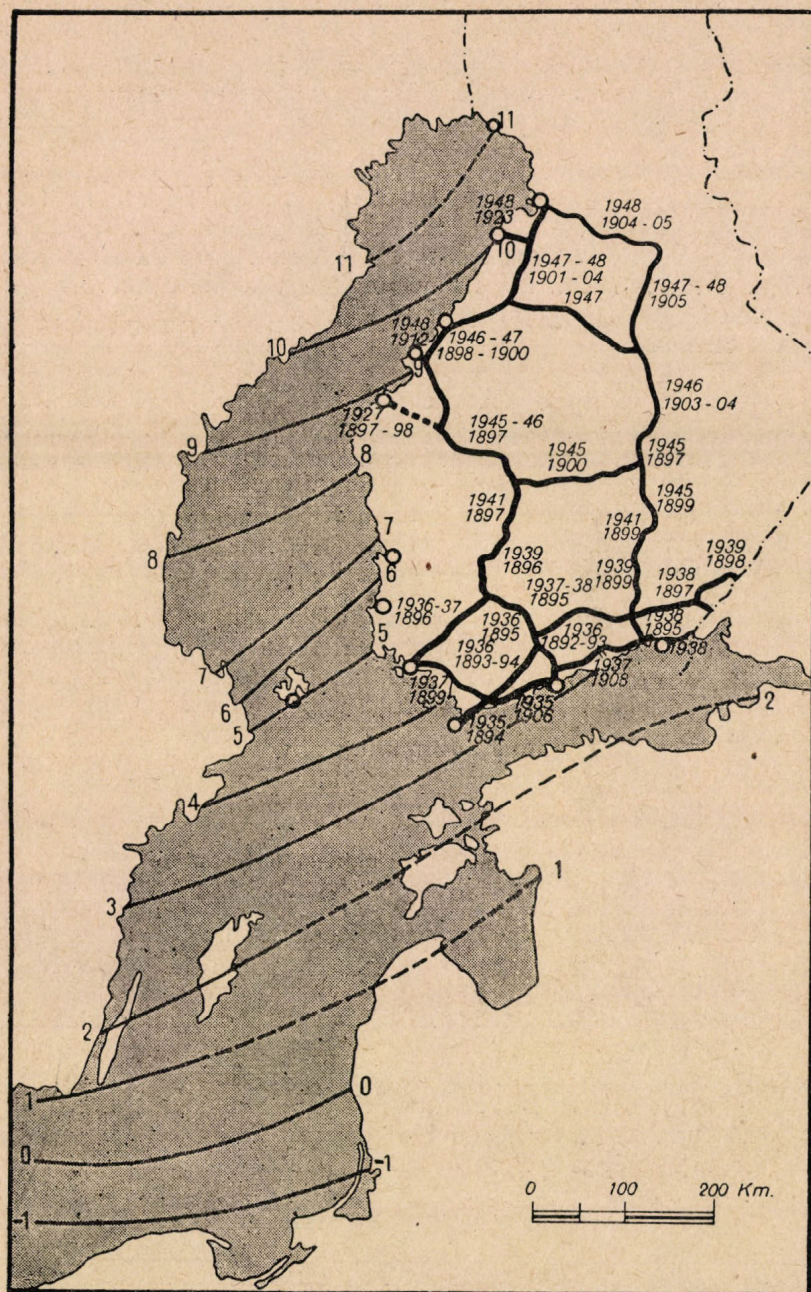
Jöllehet azóta lényegesen több szintezési vonal létesült részben az országnak olyan részein, hol nem volt régebbi szintezés, célszerű Finnország belső területeire vonatkozóan olyan talajemelkedési adatok megállapítása, melyeket a gyakorlati élet is felhasználhat.

A háború után a régi szintezési hálózat újramérése annyira előrehaladt, hogy napjainkig mintegy 3500 km oda-vissza szintezés készült el, 8 zárt poligonban és kevés kivétellel a régi menetek nyomán. Úgy a háború előtt, mint a háború után ugyanazon műszert és módszert alkalmazták.

A mellékelt 1. számú térképen az eredményeket izobaz vonalakkal tüntették fel, továbbá a meneteket is berajzolták. Az izobáz vonalak az évenkénti talajemelkedést mm-ben mutatják, a kiindulási értéket Helsinkire vonatkozólag a mareográf adatainak megfelelően 3.6 mm talajemelkedésnek vették. A 2. számú térképen feltüntették a szintezési vonalak időpontjait. A cikkíró megjegyzi, hogy a régi szintezésben a Hamina-országhatár és az Iisalmi-Ylivieska vonalakat nem észlelték, így ezekre nem lehet kiszámítani a talajemelkedést. A Lappi-Raahé és a Pännäinen-Pietarsaari meneteket a Tengerkutató Intézet, a Seinäjoki-Vaasa menetet pedig a Vízrajzi Intézet mérte.



1. ábra.



2. ábra.

Az adatok még nem véglegesek, azonban az egész hálózat kiegyenlítése után sem fog a kép lényegesen megváltozni. A térkép kiegészítése keleten és nyugaton, továbbá egy északi irányú menet mentén még várható.

Az új szintezés, poligonok záróhibáiból és az oda-visszamerés eltéréseiből számított pontossága a háború előtt és után azonos, a km-es véletlen középhibája 0,3 mm, a km-es középhiba állandórésze 0,1 mm-nél kisebb. Vignal szerint a régi szintezés középteljes hibája $\pm 1,2$ mm-t, az új szintezés $\pm 0,3$ mm-t ad km-enként, hasonló képletből számítva. A régi és az új szintezés nyújtotta magasságkülönbségek középhibája km-enként $\pm 1,24$ mm. A két szintezés között több mint 40 év telt el, tehát az évi talajemelkedés hibája $\pm 0,03$ mm km-enként. Vagyis a talajemelkedés-különbség bizonytalansága pl. Helsinki és Oulu között $\pm 0,82$ mm.

A második térképen a talajemelkedés értékei összehasonlíthatók azokkal, melyeket R. Witting a Balti-tenger partjai mentén számolt ki. A két eljárás relatív pontosságát figyelembe véve, az egyezés szembe-tűnő.

A Nörgaard graviméterre vonatkozó néhány vizsgálat (Tauno Honkasalo állami földmérő a Finn Geodéziai Intézetben).

A Finn Geodéziai Intézet 1946 nyarán végzett első ízben graviméterrel nehézségerő méréseket. A Nörgaard-féle TNK. No. 230. számú készüléket használták. A mérések folyamán kiderült, hogy a gyár által megadott hőmérsékleti korrekció nem elég pontos, ezért 1946–47 telén kísérleteket végeztek a helyes érték megállapítására.

a) A graviméter 0 pontjának mozgása különböző hőmérsékleten.

A graviméter leolvasások állandóan növekszenek az idővel. Ez a változás a hőmérséklettől függ, de nem követi a hőmérsékletváltozást azzal egyidőben. Ha a gravimétert hideg helyről melegebb környezetbe viszzük, a 0 pont mozgás nagyon gyorsan növekszik, de csak néhány nap után éri el az új hőmérsékletnek megfelelő értéket.

b) A hőmérsékleti korrekció együtthatóinak állandósága.

A régebbi Nörgaard graviméter példányoknál a hőmérsékleti koefficiens kezdő hőfoka (T_0) növekedett az idővel és mint a készítő is jelezte már, hogy a két koefficiens változhatik idővel, azért a mezei észlelések után újból megállapították a hőmérsékleti koefficiensst. Az erre vonatkozó észleléseket a készítő 1946 február 28-án végezte, az átszámolás eredményeképpen a k és T_0 koefficiensek

$$r_T = k (T - T_0)^2 \text{ mgal}$$

redukciós képletben a következő értékek adódtak:

$$k = -0.0135 \pm 0.0007$$

$$T_0 = +11^\circ.6 \pm 0^\circ.2$$

Mivel a Finn Geodéziai Intézet nem rendelkezett olyan különleges berendezéssel, melynek segítségével a hőmérsékleti koeficienseket 10^h -n belül meg lehetett volna állapítani, a következő módon rendezték be a mérést: a gravimétert váltakozva helyezték meleg és hideg helyiségbe, melynek hőmérséklete $-4,8$ -tól $+30^\circ$ C-ig változott. A gravimétert 24^h -ig hagyták más és más hőmérsékleten, ilyen körülmények között a változás nem lineáris. 9 észlelésből a következő értékeket számolták ki:

$$k = -0,0126 \pm 0,0007$$

$$T_0 = + 11^\circ.8 \pm 0^\circ.4$$

c) A graviméter folyadékának a hőmérsékleti gradiens okozta korrekciója.

A hőmérséklet gyors változásánál a hőmérsékleti korrekció megadott képlete nem helyes. Nörgaard a hibát azáltal küszöböli ki, hogy nemcsak a graviméter folyadéknak (T_1), hanem a levegőnek (T_2) hőmérsékletét is méri és a következő képletet használja:

$$r_{\Delta T} = 1. (T_1 - T_2) \text{ mgal}$$

Az 1 koeficiens értékét 6 észlelési sorozatból vezették le a Geodéziai Intézet példányára vonatkozóan és az $+ 1.38 \pm 0.15$ -nek adódott. Honkasalo kísérletei és számításai szerint ez az érték $+ 1.34 \pm 0.25$.

A nehézségerő különbség számítására a cikk a következő gyakorlati képletet közli:

$$\Delta g = [1.1139 + (m_0 - 800) 0.001 379] \Delta m + 0.000 69 (\Delta m)^2$$

A képletben m_0 a mikrométeres leolvasást, Δm pedig annak korrekcióját jelenti.

Kürti Vilmos.

Felelős kiadó: Oltay Károly.
Budapest, XI., Műegyetem.

Előfizetőinkhez.

A Geodéziai Közlöny nem kap semmiféle külön támogatást, hanem az előfizetésekből fedezi költségeit s tartja fenn magát. Számláit azonnal fizetnie kell, tehát csak akkor adható egy-egy füzet a nyomdába, ha a füzet előállítási költsége már befolyt. Ezért nagyon kérjük előfizetőinket, hogy az előfizetési díjat a mellékelt csekklappal minél előbb fizessék be. Ugy szintén kérjük az előfizetés-hátralék azonnali beküldését is, a hátralék összege a mult számmal küldött csekklapon megtalálható.

A

Stephaneum nyomda és könyvkiadó rt.

kiadásában megjelent

és minden könyvkereskedés útján beszerezhető:

OLTAY KÁROLY

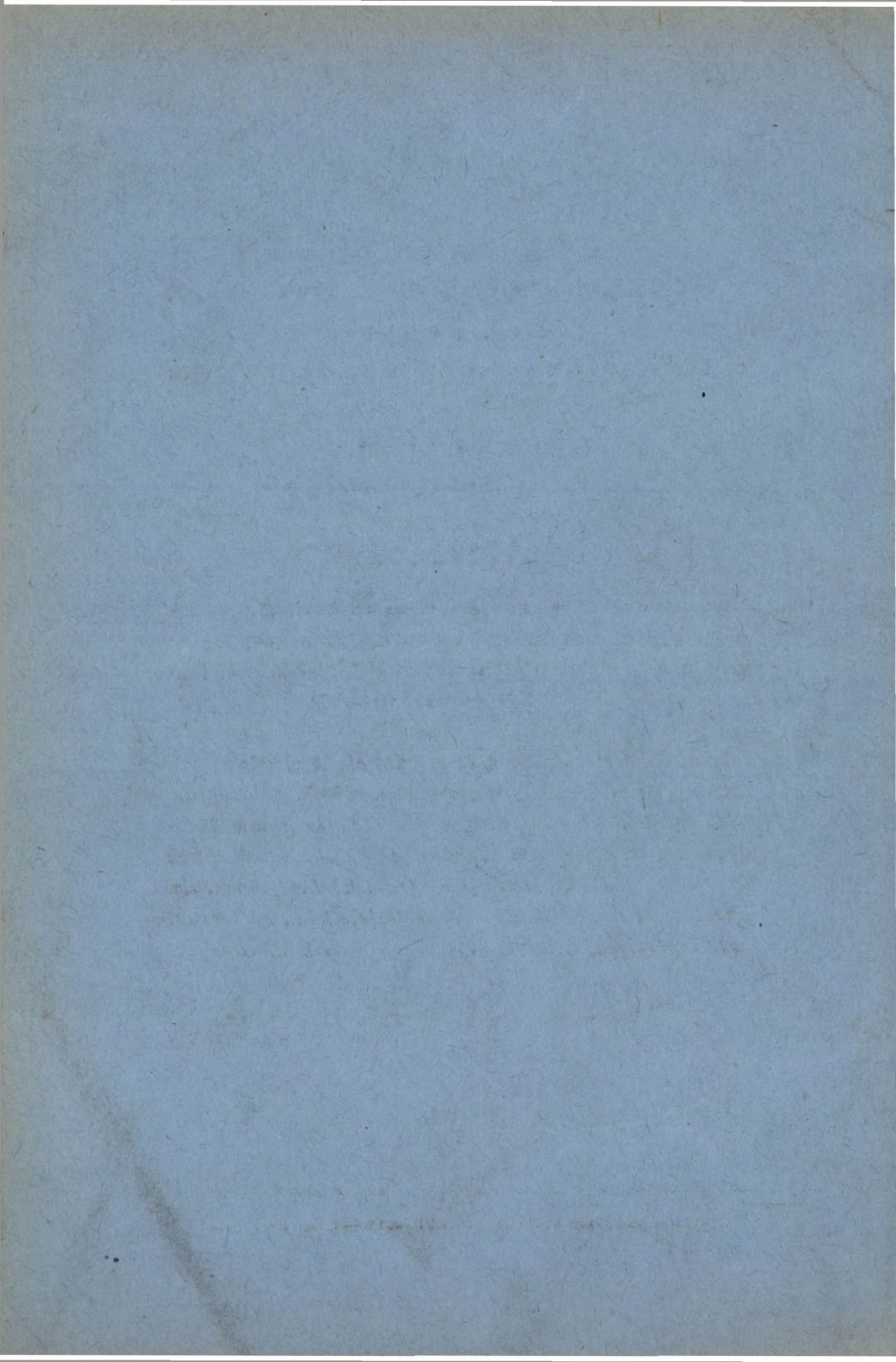
műegyetemi nyilvános r. tanár

GEODÉZIA

című műve III. kötetének 3. javított és bővített kiadása.

A mű a mérnöki gyakorlat szempontjából nagyon fontos vízszintes (helyszínrajzi) mérésekkel foglalkozik és fontosabb fejezetei az alábbiak:

Síkgeometriai alapfogalmak és számítások. A vízszintes mérés alapelve. Háromszögelés. Pontkapcsolások. Sokszögelés. Részletpontok meghatározása. Derékszögű és poláris koordináta mérés. Előmetszés. Tahimétria. Redukáló tahiméterek és tahigrafométria. Mérőasztal felvétel. Fotogrammétria. Kisebb felvételek (telek stb.). Közelítő felvételek. Földosztás, birtokrendezések, határszabályozás. Kitérőzések a vízszintes síkban.



GEODÉZIAI KÖZLÖNY

Felelős szerkesztő:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilv. rendes tanár

Szerkesztő bizottság:

Allami Földmérést érintő ügyek:

Ács Endre

műszaki tanácsos,
a Háromszögelő Hivatal főnöke.

Bence Tivadar

áll. főmérnök.

Kulturális ügyek:

Dr. Hőnyi Ede

szfőv. főmérnök.

Földreform ügyek:

Kiss Gyula

min. osztálytanácsos.

Magánmérnöki ügyek:

Murányi Tamás

okl. mérnök, magánmérnök,

Jakab Sándor

okl. mérnök, magánmérnök.

Külföldi lapszemle:

Kürti Vilmos

műegyetemi intézeti tanár.

Dr. Homoródi Lajos

áll. főmérnök.

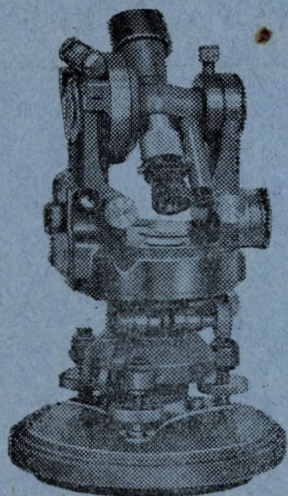
TARTALOM:

| | |
|--|-----|
| <i>Oltay Károly:</i> Egy Delambre-féle algoritmus 150 éves jubileuma | 75 |
| <i>Oltay Károly:</i> A szegedi közúti Tiszahíd újjáépítése előtt végzett geodéziai munkálatok | 81 |
| <i>Schmidt József:</i> Új elrendezésű földmértani logartábla | 100 |
| <i>Dr. Hőnyi Ede:</i> Újítómozgalom a FÖTI Városmérési Főosztályán | 107 |
| <i>Dr. Hőnyi Ede:</i> Hans Boltz professzor és munkássága (Szemle) ... | 114 |
| <i>Kürti Vilmos:</i> A „Közép-Európai” háromszöghálózat (Szemle) ... | 118 |

Előfizetési ára: egész évre 72 forint, (havonta 6 forint).

A szerkesztőség címe:

Budapest, XI., Műegyetem. — Postatakarékpénztári csekk száma: 45.223.



WILD
HEERBRUGG

**T. O. jelű
busszolás teodolit**

Könnyen kezelhető korszerű műszer. Vízszintes körre mint tájoló, vagy mint rögzített kör is használható. Leolvasása a WILD-féle koincidenziás módszerrel és , mikrométer-csavarral 1'. A távcső nagyítása 16×

Igen ajánlható erdészeti célokra,
valamint sokszögelésre.

Részletes ismertetőt és árajánlatot készséggel küld
a képviselőt:

**FINOMMECHANIKAI GYÁRTMÁNYOKAT
ÁRUSÍTÓ NEMZETI VÁLLALAT**

Székház: BUDAPEST, IX., KÖZRAKTÁR-UTCA 20/A.

Telefon: 180-873*

Fiók: IV., APPONYI-TÉR 1., Telefon: 188-226.

GEODÉZIAI KÖZLÖNY

Felelős szerkesztő:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilv. rendes tanár.

Előfizetési ára: egész évre 72 forint (havonta 6 forint).

Szerkesztőség: Bpest, XI., Műegyetem. — Postatakarékpénztári csekk számla száma: 45.223.

Egy Delambre-féle algoritmus 150 éves jubileuma.

Oltay Károly.

A jelen évben, 1949-ben *Delambre*-nak, a nagy francia matematikusnak kettős jubileuma van.

Ünnepeljük születésének 200 éves jubileumát s eredményes működésének egy fontos epizódját, a páros pontkapcsolás számítására bevezetett segédszöges eljárásnak 150 éves jubileumát.

Jean Baptist Joseph Delambre 1749 szept. 19-én született *Amiens*-ben. Eleinte a történelem és az irodalom érdekelte, majd matematikai és fizikai tanulmányokkal foglalkozott s végül az asztronómia felé fordult a figyelme. 1792-ben az Akadémia tagja lett s 1795-től a Bureau des Longitudes-ben tevékenykedett, majd a Collège de France-ban mint tanár a fizikát adta elő. 1808 óa a császári egyetem kincstárnoka s mint ilyen ment nyugalomba. Résztvett a *méter fokmérés* előkészítésében és végrehajtásában. Ő mérte az északi részt *Dunkerque*-től *Rhodez*ig. A déli rész *Barcelonáig Méchain* munkája volt. Párisban 1822 augusztus 19-én halt meg.

Egyéniségét legjobban *Cuvier* emlékszavai jellemzik, „tudományos képességénél csupán a szerénysége volt nagyobb”. Önreklám nélküli igazi tudós volt.

A páros pontkapcsolás számítására 1799-ben, tehát 150 évvel ez-előtt közölte azt a segédszöges eljárást, amelynek most jubileumát üljük.

Ezt az algoritmust tehát már 150 év óta használják, de az fele-
désbe ment, hogy ez a megoldás tőle származik.

A feladatot magát a német irodalom nyomán *Hansen*-féle feladat-
nak nevezték el, teljesen indokolatlanul, mert azt *Jordan* szerint 1685-ben
egy ismeretlen angol (állítólag *John Caswell*, az oxfordi egyetemen az
asztronómiai tanszék tanára) publikálta a *Philosophical Transaction*
XV. kötetében.

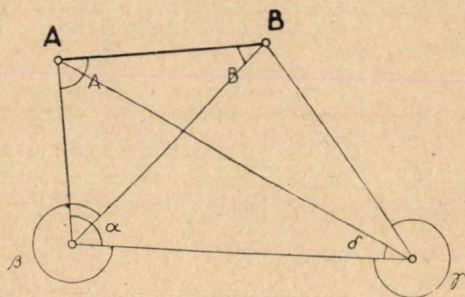
Caswell megoldása a páros pontkapcsolás geometriai megszerkesz-
tésén alapul s úgy, mint *Collins* a hátrametszésben, ő is segédpontokkal
operál. Más megoldást közöl *Lagrive* a *Manuel de Trigonometrie pra-
tique* című művében, amely 1754-en jelent meg. Ez a mű a mi hazai

könyvtárainkban már nem található meg s így a *Lagrive*-féle megoldást nem ismertethetem. Az ő megoldása valószínűleg azonos a páros pontkapcsolás ama nehézkes algoritmusával, amit később *Sossna* publikált 1896-ban. Ez azért is valószínű, mert *Delambre* szerint „sa méthode n'est pas la plus simple qu'on pût imaginer”. Éppen ez indította *Delambre*-t egy másik algoritmus kidolgozására.

Hansen csupán 1841-ben foglalkozott a páros pontkapcsolás számításával s megoldása alig tér el a *Delambre*-félétől. Egészen jogosulatlan ezt a feladatot *Hansen*-ről elnevezni, mert a feladat és a megoldás nem tőle származik.

Delambre az 1799-ben megjelent „*Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien*” művében a 149—153. oldalon foglalkozik a páros pontkapcsolással s megemlítve, hogy *Lagrive* már közölt erre nézve eljárást, két újabbat ismertet. Az egyik *közvetdő* (indirekt), a másik pedig *közvetlen* (direkt) eljárás.

Az *indirekt* megoldás alapelve az, hogy előbb tetszőleges hosszegységben számítja ki az ismeretlen oldalak hosszát s azután ezeket a megadott pontok távolságával redukálja a helyes értékekre.



1. ábra.

Legyen *A* és *B* a két megadott pont, *I* és *2* pedig azok, amelyek távolságai *A*-tól és *B*-től számítandók (1. ábra).

Az *I2* távolságot felveszi valami tetszőleges értékkel s most a megadott szögekkel számítja az

$$A1, A2, B1 \text{ és } B2$$

távolságokat.

Mivel az *A* és a *B*-nél lévő *A* és *B* szögekre felírható, hogy

$$\frac{A + B}{2} = \frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{2}$$

és (lásd alább)

$$\frac{A - B}{2} = \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} \frac{A + B}{2} \cotg (\mu + 45^\circ) \right\}$$

tehát ezek számértéke megállapítható s így kiszámítható az *AB* távolság is. Ebből és az ismeretes *AB* hosszából egyszerű arányossággal ki lehet számítani az ismeretlen hosszakat.

A *direkt* megoldásnál ugyancsak a A és a B szögeket számítja ki; ezekre felírható, hogy

$$\frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - (\alpha + \delta)}{2}$$

továbbá, hogy

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{B1}{A1} = \frac{\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}}{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \delta)}}$$

Most bevezeti a μ *segédszöget* úgy, hogy

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \delta)}}{\frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}}$$

mert akkor

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{1}{\operatorname{tg} \mu}$$

A kifejtés után ebből levezethető, hogy

$$\frac{A-B}{2} = \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \cotg(\mu + 45^\circ) \right\}$$

Az A és B háromszögek belső szögei, tehát $\left| \frac{A-B}{2} \right| < 90^\circ$. Az $\frac{A-B}{2}$ azonban negatív is lehet.

Az A és B ismerete után ki lehet számítani az $1A$, $2B$ és 12 távolságokat, vagy pedig, ha az A és a B koordinátái adottak, akkor két előmetszéssel ki lehet számítani az 1 és 2 pontok koordinátáit is.

A levezetett képletek alkalmazhatók arra az esetre is, amikor az 12 egyenes nem metszi az AB egyenest az A és a B pontok között (2. ábra), csakhogy ebben az esetben a 2. ábra szerint 'jelölendő meg az egyes szögek.

A képletek nem adnak egyértelmű megoldást,

1. ha az 1 és a 2 pont az AB egyenesen fekszik, mert ebben az esetben

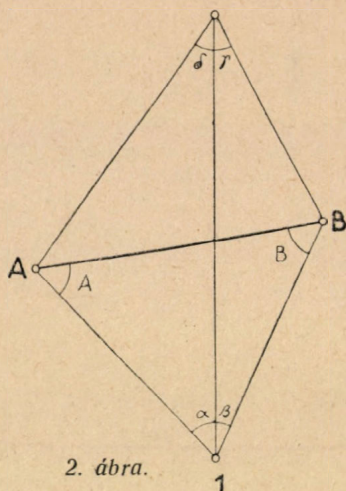
$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{0 \times 0}{0 \times 0},$$

2. ha az 12 egyenes átmegy a A , vagy a B ponton, mert az esetben

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{0 \times \sin \gamma}{0 \times \sin(\beta + \gamma)}$$

* * *

A teljesség kedvéért meg kell emlékeznünk a páros pontkapcsolás egy másik megoldásáról, melyet *H. Sossna* adott meg 1896-ban a *Zeit-*



2. ábra.

schrift für Vermessungswesen XXV. kötetében „Die Aufgabe der beiden Punktpaare in ihrer örtlichen Auswahl und rechnerischen Behandlung mittels Maschine und numerisch-trigonometrischer Hilfstafel.“

A Sossna-féle képletet az alábbiakban vezethetjük le más módon, ahogy azt Sossna a fenti cikkben teszi.

A Sossna-féle képlet azt a szöveget számítja ki, amelyet az 12 egyenes az AB egyenessel alkot (a 3. ábrán: φ).

A képlet levezetésére kiindulunk a C_1 és C_2 segédpontokból. Ezeket az 12 egyenes metszi ki az AB-n átmenő ama körökből, amelyek kerületi szögei $(\alpha + \beta)$, illetve $(\gamma + \delta)$. E segédpontokat a 3. ábra szerint két előmetszéssel lehet megállapítani.

Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert A kezdőponttal és AB pozitív X tengellyel. E rendszerben

$$x = \overline{AC_1'}$$

$$y = \overline{C_1 C_1'}$$

$$x' = \overline{AC_2'}$$

$$y' = \overline{C_2 C_2'}$$

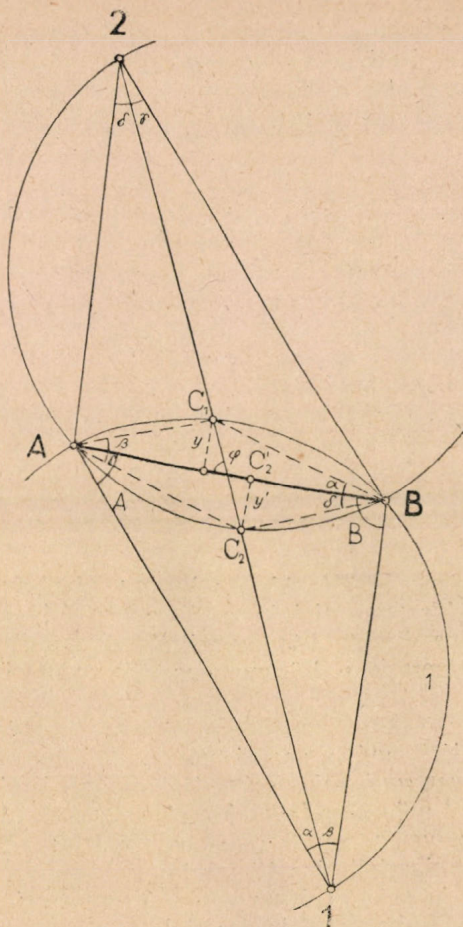
Ezekre nézve áll az, hogy

$$x = \overline{AC_1} \cos \beta = \overline{AB} \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \cos \beta$$

$$y = \overline{AC_1} \sin \beta = \overline{AB} \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \sin \beta$$

$$x' = \overline{AC_2} \cos \gamma = \overline{AB} \frac{\sin \delta}{\sin (\delta + \gamma)} \cos \gamma$$

$$y' = \overline{AC_2} \sin \gamma = \overline{AB} \frac{\sin \delta}{\sin (\delta + \gamma)} \sin \gamma$$



3. ábra.

Ebben a koordináta-rendszerben a φ szög azonos a $(C_1 C_2)$ irány-szöggel,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin \delta \sin \gamma - \sin(\delta + \gamma) \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \sin \delta \cos \gamma - \sin(\delta + \gamma) \sin \alpha \cos \beta}$$

A szögfüggvényeket kifejtve s a kijelölt műveleteket elvégezve, továbbá osztva a számlálót és nevezőt $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta$ -val, kapjuk a Sossna-féle képletet:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cotg \alpha + \cotg \beta - \cotg \gamma - \cotg \delta}{\cotg \alpha \cotg \gamma \cotg \beta \cotg \delta}$$

Ha a φ szög ismeretes, akkor számítható az A és B szög, mert

$$\varphi = A + \alpha \quad \text{tehát} \quad A = \varphi - \alpha$$

$$\text{és} \quad 180^\circ - \varphi = B + \beta \quad ,, \quad B = 180^\circ - \beta - \varphi$$

A φ képlete nem alkalmas logaritmikus számításra. Gépszámolásra is nehézkes. Hátránya továbbá az, hogy $\varphi = 90^\circ$ esetben nem ad megoldást s 90° -hoz közel álló φ esetében nagyon élesen kell számítani, ha a gyakorlatban megkívánt pontosságot el akarjuk érni.

* * *

Delambre tehát a segédszöges számítást alkalmazta, azt az eljárást, amelyet 1786-ban a hátrametszés számítására közölt s amelyet a német irodalomban eleinte *Burkhardt*, majd *Kaestner*-féle eljárásnak neveztek. Érdekes, hogy *Jordan*, a németek legkiválóbb geodétája, a *Handbuch der Vermessungskunde* című művében is ezt az elnevezést alkalmazza, bár kétségtelül ismerte *Delambre* eljárását, mert hivatkozik *Delambre* már említett munkájára (sőt *Cagnoli* Trigonometriájára is), de a *Delambre*-féle segédszöges eljárást, mint a *Kaestner*-féle megoldással teljesen egyezőt említi meg (második kötet, első rész, 446. oldalon, Eine auf Seite 135—142 des Werkes angegebene Lösung stimmt mit der von Kaestner vollständig überein). A 435. oldalon pedig azt írja, hogy a *Kaestner* megoldását 1790-ben publikálta, tehát beismeri, hogy ez 4 évvel *Delambre* után történt.

Az idézett könyv 467. oldalán *Jordan* újra megemlíti, hogy a *Delambre*-féle segédszöges eljárás a *Kaestner*-félenek felel meg (hat *Delambre* auch eine direkte Lösung mittels eines Hilfswinkels angegeben, die der *Kaestnerschen* Lösung des Rückwärtseinschneidens entspricht).

A német geodéták másik vezető tudósa, *Dr. Hammer E.* professzor, *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie* című Stuttgartban, 1897-ben megjelent művében *Delambre*-ről meg sem emlékezik. A páros pontkapcsolásról ugyanis a 332. oldalon ezt írja: „Diese Triangulierungsaufgabe geht ebenfalls ins 17. Jahrhundert zurück (1671, *Collins*); 1754 hat *Lagrive* in seinem *Manuel de Trigonometrie pratique* eine andere Lösung angegeben und in der Folge ist die Aufgabe oft behandelt worden; die unten angegebene Lösung — (a segédszöges eljárás) — ist wesentlich die von *Bohnenberger* (1802); später (1841) hat *Hansen* die Aufgabe in Coordinatensystem gelöst und sie wird häufig nach ihm benannt.”

* * *

A német irodalomban közölt adatok szerint is *Delambre* prioritása a segédszöges eljárás bevezetésére kétségtelen, ezt az eljárást az igazságnak megfelelően *Delambre*-ről kell elnevezni. Most, amikor születésének 200 éves jubileuma egybeesik a páros pontkapcsolásra megadott eljárásnak 150 éves jubileumával, mély megilletődéssel emlékezünk meg a kiváló francia tudósról s kiterjedt működésének erről a jelentős epizódjáról.

Nem engedhetjük meg feledésbe menni annak az önzetlen tudósnak nevét, akire gondolnunk kell, akkor, amikor geodéziai gyakorlatunkban a segédszöges eljárást alkalmazzuk.

Delambre neve azonban nemcsak ennek az eljárásnak révén került bele a felső geodézia annaleiseibe.

Elévülhetetlen érdeme a méterrendszert megalapozó méterfokmérés előkészítésében és végrehajtásában való eredményes közreműködése. A méter-kilogramm rendszer megindítói között az ő működése valóban korszakot alkotó volt, mert nemcsak elméletileg, de gyakorlatilag is sikerre juttatta a nemzetközi együttműködést előmozdító mérték-egységsítés nagy gondolatát.

A szegedi közúti Tiszahíd újjáépítése előtt végzett geodéziai munkálatok.

Oltay Károly.

I. Általános leírás.

A szegedi új közúti Tiszahíd megtervezése előtt dönteni kellett a fölött, hogy megtartsák-e a ferde reakciójú íves rendszert, vagy áttérjenek a függőleges reakciójú gerendatartók rendszerére. A döntés előtt az alaptalaj vizsgálatán kívül, meg kellett állapítani a meglévő pillérek távolságait és dőlési viszonyait, továbbá az első építés óta ezekben bekövetkezett változásokat.

A főfeladat az volt, hogy a közúti Tiszahíd parti pillérein és a két mederpilléren lévő *saruféspontok* pontos távolságai állapíttassanak meg.

Ebből a célból minden pilléren egy-egy 40 mm belső átmérőjű és 500 mm hosszú vascsövet mélyesztettünk be a pillérek falazatába úgy, hogy azok felső része színelt a kocsijáró burkolatával, illetve ahol az hiányzott, a pillérfalazat felső szintjével. E vascsöveket az *I. rajzon I, III, IV, és V*-el jelöltük meg *Szeged—Ujszeged* sorrendben. Helyük a hídtengelyhez, illetve a pillértengelyekhez képest különböző volt, mert azokat úgy kellett megválasztani, hogy az alapháromszög két parti pontjából jól láthatók és irányíthatók legyenek.

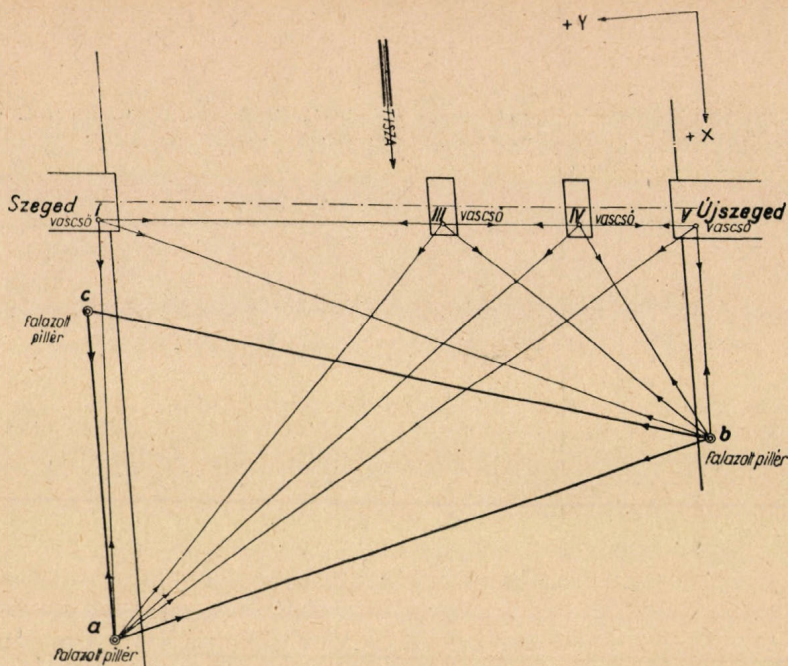
A mérés idejére a vascsövekbe jelzőkarókat helyeztünk úgy, hogy azok centrikus helyzetben függőlegesek voltak.

Az *I—V* pillérpontok relatív helyzetének szabatos megállapítására a szegedi part felső részén *két*, az újszegedi oldalon *egy* falazott pillért építettünk. A pillérek alapja $50 \times 50 \times 50$ cm méretű betontömb. Ezen a pillér 30×45 cm mérettel téglából készült, felül beton sapkával, melynek közepén vascsavar közepe jelzi a pontot.

Az *I. rajzon* e pontokat *a, c* és *b*-vel jelöltük meg. A mérés az *abc* alapháromszög sarokpontjai relatív helyzetének meghatározásával kezdődött s utána az *ab* bázisból szögmérésekkel (*kisháromszögeléssel*) határoztuk meg az *I, III, IV és V* pillérpontok relatív helyzetét.

A mérés menete a következő lépésekből állt:

1. Az *ac* alapvonal hosszának szabatos megmérése (alapvonalmérés).
2. Az alapháromszög szögeinek megmérése és egy tetszőlegesen választott koordináta rendszerben az *a.b.c* pontok koordinátáinak kiszámítása.



1. ábra.

3. A pillérpontok meghatározása ú. n. kisháromszögeléssel (a pillérpontokon is végeztünk szögmérést). Ezután a mérési eredmények (szögek) felhasználásával a pillérpontok koordinátáit számítottuk ki.

4. A sarufészekpontok függős felvetítése és poláris koordinátákkal való bemérése. A mérési eredmények alapján a fészekpontok koordinátáit állapítottuk meg a felvett koordináta rendszerben.

5. Magasságmeghatározások szintezéssel és trigonometriai magasságméréssel.

II. Alapvonalmérés.

A mérés két darab 4 m-es, parafinnal itatott, acélvégéles, fenyőfából készült mérőléccl történt, melyeket közvetlenül mérés előtt és közvetlenül utána acélnormálméterekkel és normálékekkel komparálunk s így vezettük le a mérés alatti hosszait.

A vízszintesre való redukálást az alapvonal beszintezésével megállapított magasságkülönbségekkel végeztük el.

A komparálás eredményei az alábbiak voltak:

| | 3. sz. lécs hossza: | 4. sz. lécs hossza: |
|----------------|---------------------|---------------------|
| a mérés előtt: | 4001,984 mm | 4001,789 mm |
| „ után: | 4001,881 mm | 4001,741 mm |
| eltérés: | 0,103 mm | 0,048 mm |

Az eltérések alapján a számtani közepek középhibái az alábbiak:

$\pm 0,052$ mm

és $\pm 0,024$ mm

azaz átlagban:

$$\pm 0,038 \text{ mm},$$

ami a hosszúságnak $1/152.000$ -ed részét teszi ki. Az alapvonalmérést oda-vissza értelemben *négyszer* ismételtük meg és a következő értékeket kaptuk az *ac* távolságra:

| | | | |
|----------|-------------------|--------------------|----------|
| 1. mérés | 241,3698 m, | eltérés a középtől | — 0,7 mm |
| 2. mérés | 241,3715 m, | „ „ „ | — 2,4 mm |
| 3. mérés | 241,3645 m, | „ „ „ | + 4,6 mm |
| 4. mérés | 241,3705 m | „ „ „ | — 1,4 mm |
| Közép | <u>241,3691 m</u> | | |

Az egyes méréseknek a középtől való eltérése alapján egyetlen hossz mérés középhibája

$$\pm 3,12 \text{ mm}$$

a végeredményé pedig

$$\pm 1,56 \text{ mm}$$

ami a hosszúság $1/155.000$ -ed részét teszi ki.

Ez tekinthető a levezetett alapvonalérték *középvéletlen* hibájának.

Az alapvonal mérés középteljes hibájának meghatározása csupán avval a feltevéssel végezhető el, hogy a középhiba állandó része egyenlő a normálméterek pontosságát jellemző középhibával. A komparálás két normálméterrel történt, egynek-egynek a középhibája $\pm 0,01$ mm, tehát kettő hosszának számtani közepében

$$\pm \frac{0,01}{\sqrt{2}} = \pm 0,007 \text{ mm}.$$

Ezt véve alapul, az alapvonal hosszának állandó hibája

$$\pm 1,69 \text{ mm}$$

Eszerint tehát az alapvonal mérés középteljes hibája

$$\mu_{ac} = \sqrt{1,56^2 + 1,69^2} = \pm 2,28 \text{ mm},$$

ami az alapvonal hosszának $1/106.000$ -ed részét teszi ki.

III. Az alapháromszög szögeinek megmérése.

A szögméréseket egy *Zeiss-féle T2* jelzésű, kettős beosztású teodolittal végeztük el. Minden szöget *hat* különböző körfekvésben és minden körfekvésben *két* távcsőállításban mértük meg. Teljes önállóságra igyekezve, minden második körfekvés után a teodolit és a pontjelzők felállítását újra elvégeztük. A szögmérés alatt a többi pontokat különleges, szabatosan a pont felé helyezhető pontjelzőkkel jelöltük meg. Ezáltal úgy a pontjelzők, mint a teodolit pontraállítását néhány tized milliméter pontossággal végeztük el.

A szögmérés eredményei a következők voltak:

| <i>a</i> -nál levő szög: | <i>b</i> -nél levő szög: | <i>c</i> -nél levő szög: |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 89° 46' 12.6" | 31° 40' 51.2" | 58° 32' 57.6" |
| 11.6 | 48.8 | 59.6 |
| 9.0 | 47.6 | 57.8 |
| 16.2 | 48.2 | 59.9 |
| 15.2 | 49.2 | 56.9 |
| 10.3 | 48.4 | 60.4 |
| Közép: 89° 46' 12.5" | 31° 40' 48.9" | 58° 32' 58.7" |

Eszerint a szögmérés záróhibája

$$-0,1''$$

vagyis egy szög Ferrero-féle középhibája: $\pm 0,06''$.

IV. Koordináta-rendszer felvétele és az alapháromszög sarokpont-koordinátáinak megállapítása.

A továbbiakban az alapul választott koordináta-rendszert úgy vet-tük fel, hogy a *X* tengely párhuzamos legyen az *ac* alapvonallal, to-vábbá, hogy a *c* pont *Y* koordinátája + 500,000 m, *X* koordinátája pedig + 80,000 m legyen.

E koordinátarendszerben az alapháromszög sarokpontjainak koor-dinátái az alábbiak:

| | <i>Y</i> | <i>X</i> |
|----------|-------------|-------------|
| <i>a</i> | + 500,000 m | + 321,369 m |
| <i>b</i> | + 107,929 | + 319,795 |
| <i>c</i> | + 500,000 | + 80,000 |

V. A kisháromszögelés alaphosszának (*ab*) pontossága.

A kisháromszögelés alaphosszára, az *ab* távolságra az alábbi ér-téket vezettük le a fent közölt koordinátákból:

$$\overline{ab} = 392,073 \text{ m}$$

Ennek középhibáját a függvényérték középhibájának tétele alapján a következő képlettel lehet kiszámítani:

$$\mu_c = C \sqrt{\frac{1}{b^2} \mu_b^2 + (\cotg^2 \beta + \cotg^2 \gamma) \frac{\mu_\varphi^2}{\varrho''^2}}$$

ahol *b* a mért alapvonal, μ_b ennek középhibája, γ és β a *c*, illetve *b* oldallal szemben levő szög és μ_φ ezek középhibája.

A számértékek a következők:

$$\begin{aligned} b &= 241 \text{ m} \pm 2,28 \text{ mm} \\ c &= 392 \text{ m} \\ \beta &= 31^\circ 41' \pm 0,06'' \\ \gamma &= 58^\circ 33' \pm 0,06'' \end{aligned}$$

Ha ezeket behelyettesítjük μ_c képletébe, akkor az alábbi számértéket kapjuk:

$$\mu_c = \mu_{ab} = \pm 0,0038 \text{ m},$$

ami a hosszúság $1/103.000$ -ed részét teszi ki.

VI. Az I., III., IV. és V. pillérpontok meghatározása.

A meghatározás az ab alaphosszra *kisháromszögeléssel*, azaz csupán szögméréssel történt.

A szögmérést teljesen úgy végeztük el, mint az alapháromszögben, tehát minden szöget a *Zeiss, T2* műszerrel 6 körfekvésben mértünk, 3 önálló pontra állítással. Minden körfekvésben két távcsőállásban végeztük el a mérést, tehát minden szögre 12 értéket kaptunk. Az irányzás az a és b pontra az azokon elhelyezett különleges pontjelzőkre, a pillérpontokon pedig a vascsövekbe helyezett jelzőkarókra történt.

A szögmérés pontosságára jellemzők az egyes háromszögek záróhibái.

Ezek az alábbiak:

| | | | |
|-----|------|----------------------|--------|
| I | ab | háromszög záróhibája | — 9.8" |
| III | ab | „ „ | — 3.0" |
| IV | ab | „ „ | — 3.8" |
| V | ab | „ „ | + 2.6" |

A záróhibákból megállapítható a szögmérés *Ferrero*-féle közép-
hibája és pedig:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3N}} = \pm 3.2''$$

Az érték nagyobb volta onnan származik, hogy a mért szögek, a kisebb távolságok és a pontjelzés kevésbé tökéletes volta miatt kisebb pontosságúak, mint voltak az alapháromszög mérésekor.

A szögmérési eredmények és az a és b pontok koordinátái alapján kiszámítottuk a pillérpontok koordinátáit a felvett koordináta rendszerben.

Ezek az alábbiak:

| | Pont | Y | X | Magasság |
|-----|--------|-----------|----------|----------------|
| I | vascső | 483,683 m | 12,645 m | 90,561 m A. f. |
| III | „ | 268,007 | 60,776 | 91,621 |
| IV | „ | 178,125 | 80,704 | 89,523 |
| V | „ | 100,060 | 98,655 | 87,614 |

A táblázatba teljesség kedvéért a pontok magasságát is bejegyeztük.

A fenti számításokat az adatok megadásának gyorsítása céljából csupán a szögmérés eredményeinek közelítő kiegyenlítésével végeztük el, nevezetesen úgy, hogy csupán az egyes háromszögeket egyenlítettük ki. Utólag azonban a hálózati szigorú kiegyenlítését is végrehajtottuk korrelációs eljárással. A hálózatban 7 szögfeltételi egyenlet és 3 oldal-feltételi egyenlet volt s így 10 normális egyenletet kellett megoldani.

A szigorú kiegyenlítés után kiszámítottuk a pillérpontok koordinátáit s ezeket az alábbi táblázat 2. oszlopában foglaltuk össze:

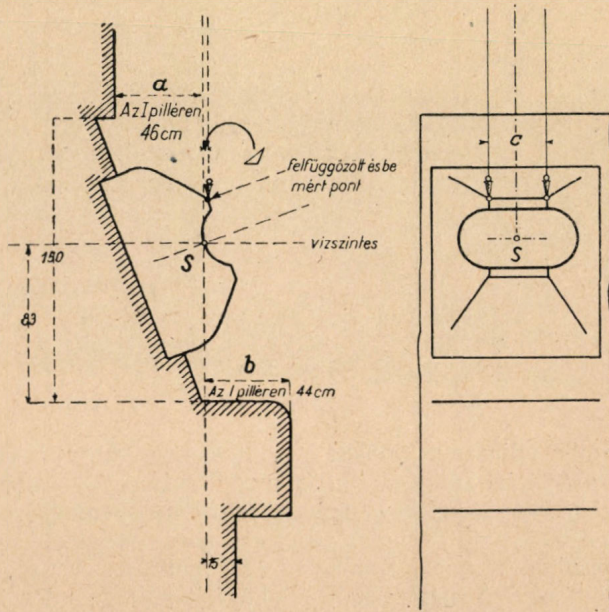
| Pillér | Szigorú kiegyenlítés | Közelítő | Eltérés Szig.—Köz. |
|-----------|-------------------------|-------------|-----------------------|
| X_I | + 12,646 m | + 12,645 m | + 1 mm |
| X_{II} | + 60,774 " | + 60,776 " | - 2 " |
| X_{III} | + 80,705 " | + 80,704 " | + 1 " |
| X_{IV} | + 98,652 " | + 98,655 " | - 3 " |
| Y_I | + 483,682 " | + 483,683 " | - 1 " |
| Y_{II} | + 268,008 " | + 268,007 " | + 1 " |
| Y_{III} | + 178,127 " | + 178,125 " | + 2 " |
| Y_{IV} | + 100,062 " | + 100,060 " | + 2 " |

Az egység súlyú eredmény középhibája a szigorú kiegyenlítésből $\pm 3,5''$. Ez a Ferrero-féle középhibával ($\pm 3,2''$) eléggé jól egyezik.

Az eltérések minimálisak úgy, hogy a továbbiakban a közelítő kiegyenlítés eredményei alapján nyert értékeket használtuk fel.

VII. A sarufészekpontok meghatározása.

A 2. rajzon ábrázoltuk az egyes ívek pillérsaruját s annak elhelyezését a pillértesten.



2. ábra.

Feladatunk volt a sarufészek középpontjának bemérése. Ez a pont azonban közvetlenül nem volt megfogható s ezért a sarufészek feletti saruél két végpontját határoztuk meg. Ezeket jól fel lehetett függetlení a sarufészekpontokból poláris koordináta-méréssel szabatosan be lehetett mérni.

Minden pilléren az északi és a déli főtartók saruközepeit kellett megállapítani s ezért minden pilléren a szélső saruk két-két pontját határoztuk meg. Megjegyzem azonban, hogy a III. pillér nyugati (szegedi) oldalán csak az északi főtartó saruja volt meg, s így itt a déli részen a párkány szélét mértük be. A felvetített pontok és a sarufészekpontok vízszintes távolságait az egyes sarukon külön-külön bemértük s a talált értékeket a 3. rajzon állítottuk egybe. Ugyancsak bemértük a felvetített pontok távolságát a pillérfal síkjától (a) és a párkány homlok-síkjától (b).

Ezeket a méreteket a 4. rajzon a saruk alatti pillérpárkány szintjén beírt számok adják meg.

A poláris koordináták alapján kiszámítottuk a felvetített sarupontok koordinátáit; a nyert értékek az alábbiak:

I. pillér.

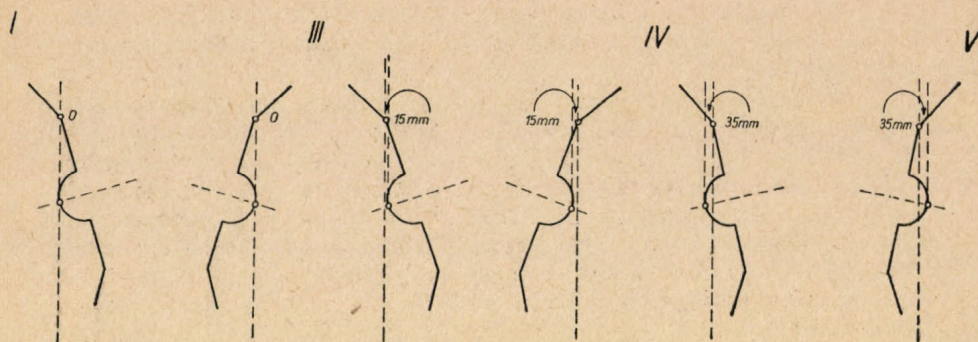
| | Y | X |
|-----------------|-----------------------------|----------------------|
| Déli főtartó: | $S_1^I + 478,693 \text{ m}$ | $+ 15,755 \text{ m}$ |
| | $S_2^I + 478,549$ | $+ 15,109$ |
| Északi főtartó: | $S_3^I + 478,189$ | $+ 7,408$ |
| | $S_4^I + 478,051$ | $+ 6,768$ |

V. pillér.

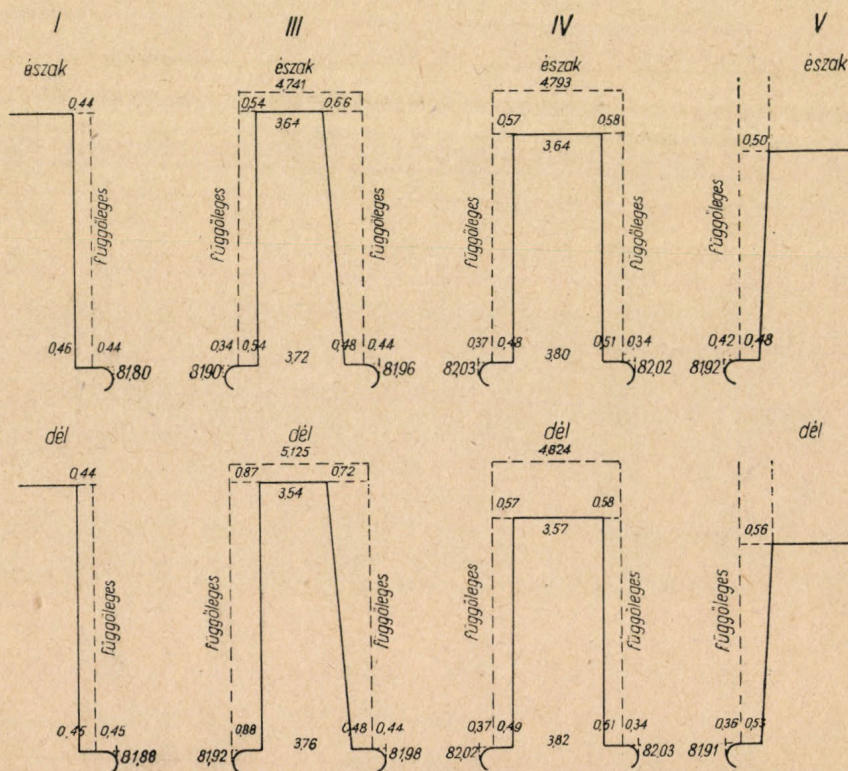
| | Y | X |
|-----------------|-----------------------------|----------------------|
| Déli főtartó: | $S_1^V + 112,289 \text{ m}$ | $+ 97,836 \text{ m}$ |
| | $S_2^V + 112,197$ | $+ 97,361$ |
| Északi főtartó: | $S_3^V + 111,794$ | $+ 89,499$ |
| | $S_4^V + 111,680$ | $+ 88,987$ |

III. pillér.

| | Y | X |
|------------------------------------|---------------------------------|----------------------|
| Szegedi oldal, északi főtartó | $S_3^{III} + 270,231 \text{ m}$ | $+ 54,012 \text{ m}$ |
| | $S_4^{III} + 270,129$ | $+ 53,457$ |
| Ujszegedi oldal, északi főtartó | $S_5^{III} + 265,475$ | $+ 54,476$ |
| | $S_6^{III} + 265,624$ | $+ 55,031$ |
| Ujszegedi oldal, déli főtartó | $S_7^{III} + 265,916$ | $+ 62,913$ |
| | $S_8^{III} + 266,048$ | $+ 63,475$ |



3. ábra.



4. ábra.

IV. pillér.

| | Y | X |
|------------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| Szegedi oldal, déli főtartó | $S_1^{IV} + 181,747 \text{ m}$ | $+ 82,330 \text{ m}$ |
| | $S_2^{IV} + 181,613$ | $+ 81,845$ |
| Szegedi oldal, északi főtartó | $S_3^{IV} + 181,231$ | $+ 73,998$ |
| | $S_4^{IV} + 181,086$ | $+ 73,488$ |
| Ujszegedi oldal, északi főtartó | $S_5^{IV} + 176,419$ | $+ 74,525$ |
| | $S_6^{IV} + 176,532$ | $+ 75,013$ |
| Ujszegedi oldal, déli főtartó | $S_7^{IV} + 176,905$ | $+ 82,863$ |
| | $S_8^{IV} + 177,027$ | $+ 83,356$ |

A fenti értékek alapján az északi és a déli főtartók saruközepeire vonatkozó koordináták az alábbiak:

I. pillér.

| | Y | X |
|----------------|-----------------------|----------------------|
| Déli főtartó | $+ 478,621 \text{ m}$ | $+ 15,432 \text{ m}$ |
| Északi főtartó | $+ 478,120$ | $+ 7,088$ |

III. pillér.

| | Y | X |
|------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| Szegedi oldal, déli főtartó | $+ 270,659 \text{ m}$ | $+ 62,187 \text{ m}$ |
| Szegedi oldal, északi főtartó | $+ 270,180$ | $+ 53,734$ |
| Ujszegedi oldal, északi főtartó | $+ 265,550$ | $+ 54,754$ |
| Ujszegedi oldal, déli főtartó | $+ 265,982$ | $+ 63,194$ |

IV. pillér.

| | Y | X |
|-------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| Szegedi oldal, déli főtartó | $+ 181,158 \text{ m}$ | $+ 73,743 \text{ m}$ |
| Szegedi oldal, északi főtartó | $+ 176,476$ | $+ 74,769$ |
| Ujszegedi oldal, északi főtartó, | $+ 181,680$ | $+ 82,088$ |
| Ujszegedi oldal, déli főtartó | $+ 176,966$ | $+ 83,110$ |

V. pillér.

| | Y | X |
|----------------|-----------------------|----------------------|
| Déli főtartó | $+ 112,243 \text{ m}$ | $+ 97,599 \text{ m}$ |
| Északi főtartó | $+ 111,737$ | $+ 89,243$ |

Megjegyzem, hogy a III. pillér szegedi oldalának déli részén a hiányzó vassarú helyett a párkány szélét vetítettük fel és az északi sarunál mért „párkány-sarúpont” távolsággal végeztük el a számítást. A mérés és a számítás állandó ellenőrzésére szolgált az a körülmény, hogy a függőzés alkalmával megmértük a sarupontok egymástól való távolságát, aminek egyezni kellett a sarupontok koordinátái-ból levezethető értékkel.

VIII. A sarufészek-távolságok számértékei.

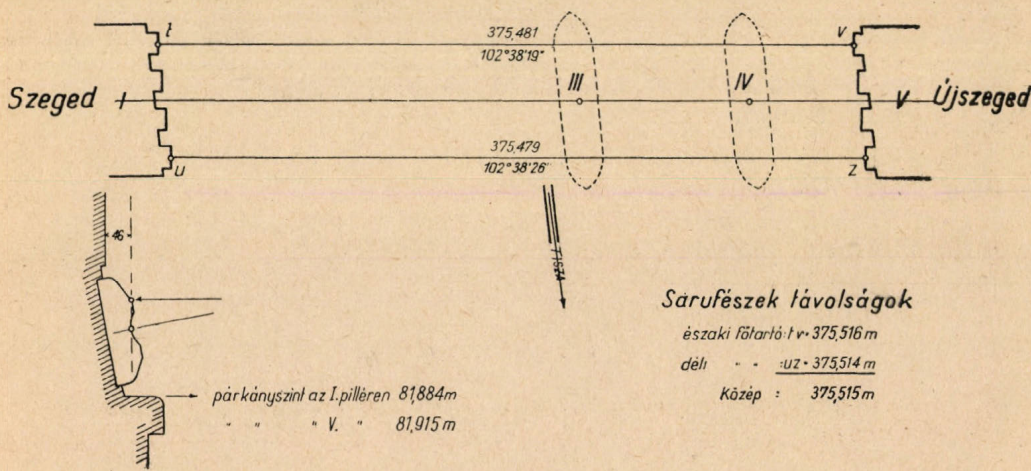
A függővel felvetített sarúpontok koordinátaiból kiszámítottuk először az I. és az V. *parti pillér* északi és déli főtartóján lévő sarupontok távolságát s ezekre a következő értékeket kaptuk:

| | |
|-----------------|-------------------|
| északi főtartó: | 375,481 m |
| déli „ | 375,479 |
| Közép: | <u>375,480 m.</u> |

A megfelelő irányszögek

| | |
|---------------------|---------------|
| az északi főtartón: | 102° 38' 19'' |
| a déli „ | 102° 38' 26'' |

ezekből a hídteigely irányszöge: 102° 38' 22''



5. ábra.

Mivel az I. parti pilléren a 3. rajz adatai szerint a sarufészekpont és a felvetített sarupont közti vízszintes távolságok 0 mm, az V. parti pilléren pedig + 35 mm, azért a *sarufészek-távolságok*

| | |
|---------------------|-------------------|
| az északi főtartón: | 375,516 m |
| a déli „ | 375,514 |
| Közép: | <u>375,515 m.</u> |

A mérési eredményeket az 5. rajzon is egybefoglaltuk, melyen alul a saruk alatti párkány felső szintjének magasságát is bejegyeztük.

Az utóbbiakhoz meg kell jegyeznem, hogy a
párkányszint az I. pillér északi sarkán

81,890 m A. f.

„ „ „ déli „

81,879 m A. f.

azaz a párkány dél felé lejt 11 mm-rel.

A párkányszint az V. pillér északi sarkán

81,924 m A. f.

„ „ „ déli „

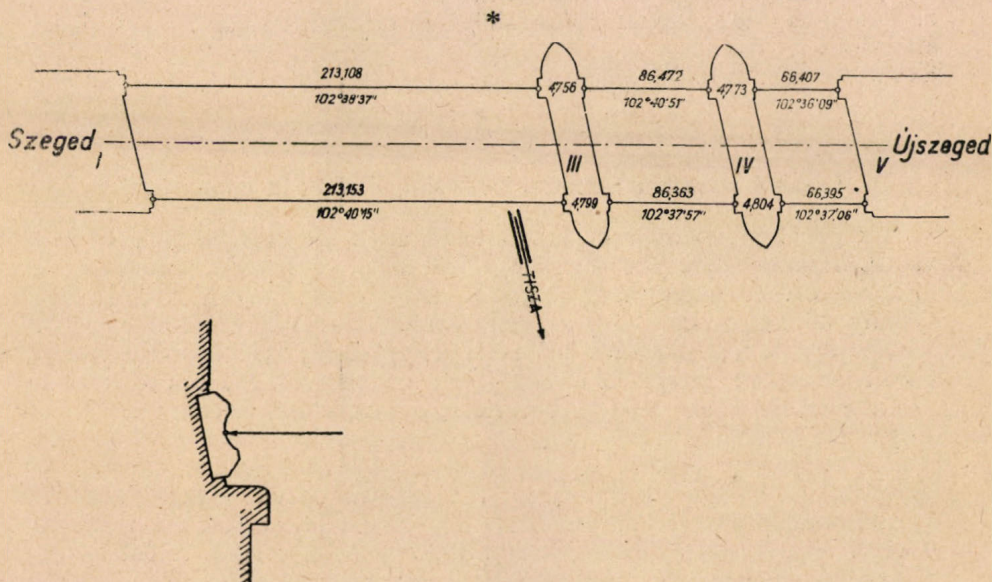
81,906 m A. f.

azaz a párkány dél felé lejt 18 mm-rel.

A két párkányszint közti magasságkülönbség a hídtengelynek megfelelő pontok között

35 mm

és pedig az újszegedi pillér szintje a magasabb.



6. ábra.

A szomszédos pillérek közti sarufészek-távolságokat az előbbiek szerint szintén kiszámítottuk s az eredményeket a 6. rajzon foglaltuk egybe.

A 6. rajzon beírt szögek a megfelelő távolságok irányszögeit jelentik. geit jelentik.

Eszerint:

az I., III. sarufészek-távolság az északi oldalon: 213,108 m
„ „ déli „ 213,153 m

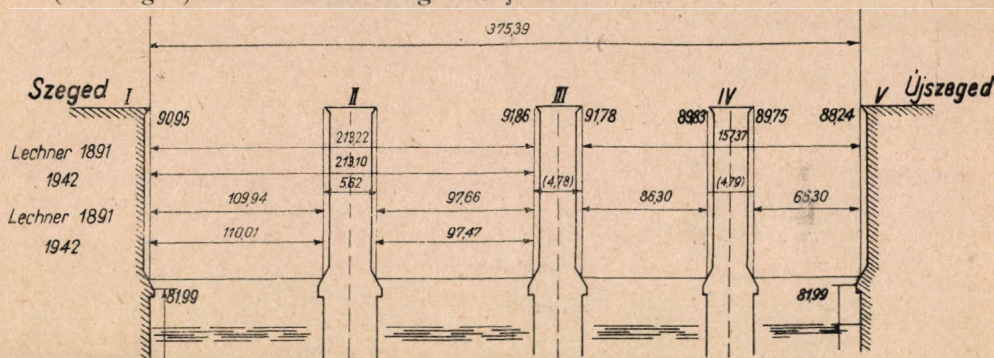
eltérés (É—D) oldalon: — 0,045 m

a III., IV. sarufészek-távolság az északi oldalon: 86,472 m
„ „ déli „ 86,363 m

az eltérés (É—D) oldalon: + 0,109 m

E szerint a II. pilléren 16 cm-rel a IV. pilléren pedig 7 cm-rel nagyobb a pilléreken lévő sarufészek egymástól vett távolsága, mint az Eiffel-féle rajzon.

A 7. rajzon a III. és a IV. pilléren zárójelbe írt számok a jelenlegi (valóságos) sarufészek-távolságokat jelentik.



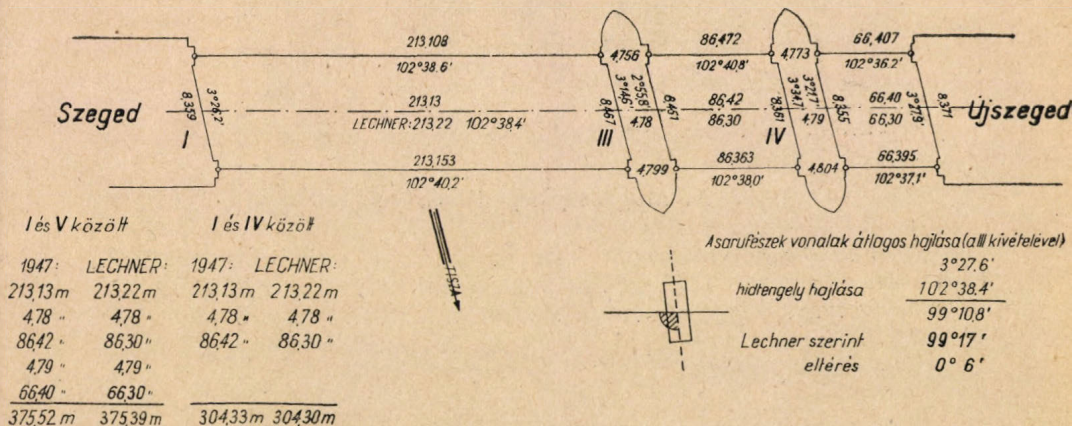
0 víz magasság 74,470 m

A felül markánsan írt számok a gyalogjárók tengerszint feletti magasságait jelenlik az északi alaton.

7. ábra.

A régi és az új távolságok összehasonlítására a 8. rajzon foglaltam egybe a jelenlegi mérésünk eredményeit és a Lechner-féle sarufészek-távolságokat. E szerint

A híd tengelyen mérve építéskor a teljes hossz 375,39 m
1947-ben " 375,52 m
eltérés 0,13 m



8. ábra.

a hídtengelyen mérve a sarufészek-távolságok az I. és V. pillér közt
az építéskor (Lechner) 375,39 m
jelenleg 375,52 m

vagyis az építés óta 13 cm-rel nagyobbodott a két parti pillér közti távolság, ha a *Lechner*-féle adatok helyesek.

A többi sarufészek-távolságra nézve

| | | |
|---------------------|------------|----------------------------|
| I., III. távolság: | építéskor: | 213,22 m |
| | jelenleg: | 213,13 |
| | | <hr/> 0,09 m (rövidülés) |
| I., IV. távolság: | építéskor: | 304,30 m |
| | jelenleg: | 304,33 m |
| | különbség: | <hr/> 0,03 m (nagyobbodás) |
| III., IV. távolság: | építéskor: | 86,30 m |
| | jelenleg: | 86,42 m |
| | különbség: | <hr/> 0,12 m (nagyobbodás) |
| IV., V. távolság: | építéskor: | 66,30 m |
| | jelenleg: | 66,40 m |
| | különbség: | <hr/> 0,10 m (nagyobbodás) |

Ha feltételezzük, hogy az *I. parti pillér helyzete változatlan* maradt, akkor

| | |
|------------------------------------|------------|
| a III. pillér Szeged felé mozdult | 9 cm-rel, |
| a IV. pillér Ujszeged felé mozdult | 3 cm-rel, |
| az V. pillér Ujszeged felé mozdult | 13 cm-rel. |

Ha pedig a *IV. pillért vesszük változatlannak*, akkor

| | |
|------------------------------------|------------|
| az I. pillér Szeged felé mozdult | 3 cm-rel, |
| a III. pillér Szeged felé mozdult | 12 cm-rel, |
| az V. pillér Ujszeged felé mozdult | 10 cm-rel. |

Szerintem az utóbbi eshetőség a valószínűbb.

X. Magasságmeghatározások.

A magasságmeghatározásokban kiindulásul szolgált a tiszaparti várromon elhelyezett 224. számú, furatos falitárcsával megjelölt *vízrajzi főpont*, melynek magasságát 1879 előtt a szolnoki vasuti állomáson lévő katonai magassági jegyből vezették le.

E pont magassága

84,421 m A. f.

Evvel kapcsolatban megemlítem, hogy a Tisza 0 vizének magasságát 1879-ben

74,470 m A. f.

értékkel állapították meg s ez az érték azóta változást nem szenvedett.

Megemlítem továbbá, hogy a Széchenyi-téri korzón az Aigner sarokház előtt Halácsy helyezett el egy vasasztalt (I. számú főpont), melynek magasságát 82,683 m-rel adta meg. Ezt a pontot összeszinteztük a 224. számú vízrajzi főponttal s 23 mm eltérést kaptunk. Az I. számú főpont helyes magassága tehát

82,706 m A. f.

*

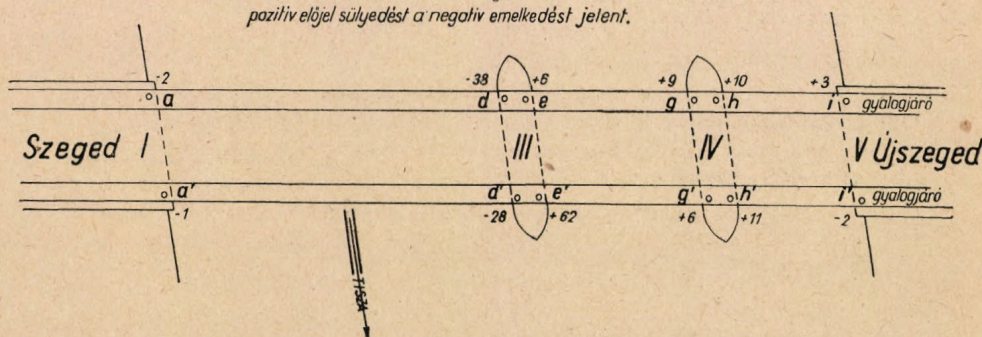
A 224. sz. vízrajzi főponttól kiindulva részben szintezéssel, részben trigonometriai magasságméréssel (mindig oda-visszaméréssel) meghatároztuk a pilléren elhelyezett I., III., IV. és V.-tel jelölt vascsövek felső szintjének magasságát, a szegedi és újszegedi hídőrházon elhelyezett 1284. és 1285. számú fali gombok magasságát, továbbá a III., a IV. és az V. pillérek úttestén elhelyezett vasszegecsék magasságát.

A magasságmérés eredményei a következők:

| A pont jele, ill. száma | A megjelölés módja | Magasság Adria felett | Megjegyzés |
|-------------------------|--------------------|-----------------------|----------------------|
| I. | vascső | 90,561 m | a cső felső szintje |
| III. | „ | 91,621 | „ „ „ „ |
| IV. | „ | 89,523 | „ „ „ „ |
| V. | „ | 87,614 | „ „ „ „ |
| 3. | vasszegecs | 91,598 | a szögecs tetőpontja |
| 4. | „ | 89,559 | „ „ „ „ |
| 1284. | fali gomb | 90,510 | szegedi hídőrház |
| 1285. | „ „ | 87,942 | újszegedi „ |

Ezekén kívül megmértük annak a 12 vésett jelnek a magasságát, melyeket 1923-ban a gyalogjáró párkányköveibe helyeztek el, s amelyet akkor be is szinteztek.

A gyalogjárókon 1923-ban elhelyezett jelek (vésett keresztlek) magasságainak megváltozásai. A jelek mellé írt számok mm-ben jelentik az eltéréseket az 1947. évi méréstől. A pozitív előjel süllyedést a negatív emelkedést jelent.



9. ábra.

E vésett jeleknek (9. rajz) úgy a vízszintes, mint a magassági helyzetét meghatároztuk s az eredményeket az alábbi táblázatban foglaltam össze. Az összeállításban a 9. rajznak megfelelő jelzéseket hasz-

náltuk, vagyis *a*, *d*, *e*, *g*, *h*, és *i* az északi gyalogjárón vannak, *a'*, *d'*, *e'*, *g'*, *h'*, és *i'* pedig a déli gyalogjárón.

| A véssett jel | Y | X | Magasság Adria felett |
|---------------|-------------|-----------|-----------------------|
| <i>a</i> | + 478,533 m | + 5,789 m | 90,892 m |
| <i>a'</i> | 479,173 | 16,523 | 90,882 |
| <i>d</i> | 269,420 | 52,780 | 91,835 |
| <i>d'</i> | 270,021 | 63,162 | 91,888 |
| <i>e</i> | 266,289 | 53,510 | 91,848 |
| <i>e'</i> | 266,874 | 63,871 | 91,928 |
| <i>g</i> | 180,360 | 72,887 | 89,895 |
| <i>g'</i> | 180,978 | 83,147 | 89,904 |
| <i>h</i> | 177,112 | 73,626 | 89,801 |
| <i>h'</i> | 177,731 | 83,912 | 89,825 |
| <i>i</i> | 111,109 | 88,400 | 88,226 |
| <i>i'</i> | 111,700 | 98,731 | 88,154 |

XI. Régebbi magasságmérések és azoktól való eltérések.

1. Gyalogjáró-magasságok.

Az Eiffel-féle terveken a pillérfalsík feletti gyalogjáró-pontok 0 víz feletti magasságai vannak megadva. Ezeket a 74,470 kóta szerint átszámítva tengerszínfeletti magasságokra, az alábbi táblázat 2. oszlopában foglaltuk össze, s mellé a 3. oszlopba bejegyeztük az általunk az északi gyalogjárókra megállapított értékeket.

| Pillér | Építési magasság | Jelenlegi (1947) magasság | Különbség |
|--------|------------------|---------------------------|-----------|
| I. | 90,95 m | 90,89 | — 6 cm |
| III. | 91,86 | 91,84 | — 2 |
| | 91,78 | 91,85 | + 7 |
| IV. | 89,83 | 89,90 | + 7 |
| | 89,75 | 89,80 | + 5 |
| V. | 88,24 | 88,23 | — 1 |

Az V. pilléren, a déli oldalon a gyalogjáró-magasság 72 mm-rel alacsonyabb, tehát itt vagy sülyedés következett be, vagy már építéskor ennyivel alacsonyabbra készítették a gyalogjárót. A IV. pilléren átlagban 6 cm-rel magasabb a gyalogjáró, tehát itt vagy időközben átépítés történt, vagy már eredetileg is 6 cm-rel alacsonyabbra készült.

2. Sarupárkány-magasságok.

A saruk alatti párkányok magasságai az Eiffel-féle kiviteli terveken minden egyes pillérre + 7,52 m kótával vannak megadva, azaz tengerszínfeletti magasságuk + 81,99 m.

Evvel szemben az I. pilléren a jelenlegi párkánymagasság + 81,88 m, azaz 11 cm-rel alacsonyabb, az V. pilléren pedig + 81,92 m, azaz 8 cm-rel alacsonyabb. Itt tehát ellentmondást találunk, mert az I. pilléren a gyalogjáró szintje csak 6 cm sülyedést mutat, az V. pilléren pedig az északi oldalon 1 cm-t, a déli oldalon pedig 7 cm-t találunk.

3. Az 1923. évi gyalogjáró-magasságokra vonatkozó szintezések.

1923. év április havában az államépítészeti hivatal a gyalogjáró vízfelőli oldalán levő párkányköveken *véselt* jeleket helyezett el (9. rajz) s ezek magasságait szintezéssel állapította meg.

E jeleket a 9. rajzon

| | | |
|--------|----------|----------------|
| az I. | pilléren | a, a' |
| a III. | „ | b, c, b', c' |
| a IV. | „ | g, h, g', h' |
| az V. | „ | i, i' |

betűt jelzik. E szerint a, b, c, g, h, i az északi gyalogjárón, az a', b', c', g', h', i' pedig a délin vannak. A szintezés kiinduló pontjául a Széchenyikorzón levő I-es számú vasasztallal megjelölt *főpont* szolgált. Ennek magasságát 82,683-ban adták meg, de a helyes magasság, a vízrajzi főpontból kiindulva végzett szintezésünk szerint 82,706 m.

A számítás azonban nem evvel a magassággal történt, mert a méréseink szerint, az általuk az I. és az V. pillérre megadott magasságok 0,213 m-rel alacsonyabbak, vagyis azóta 213 mm emelkedés állott volna elő ezeken a pilléreken.

Ezért sajnálattal kell megállapítanunk, hogy az 1923. évi mérés eredményeit csak arra lehet felhasználni, hogy a III. és a IV. pilléren milyen változások következtek be 1923. és 1947. évek közötti időben.

E célból az 1923. évi mérés eredményeit megnöveltük 0,213 m-rel s az így nyert értékeket hasonlítottuk össze az 1947. évi mérés eredményeivel. Az összehasonlítás eredményeit a 9. rajzon tüntettük fel. E szerint a III. pillér nyugati (Szeged felőli) oldalán 38 mm, illetve 28 mm emelkedés, a keleti oldalán pedig 6 mm, illetve 62 mm súlyedés következett be. A IV. pilléren átlagban 9 mm súlyedés állapítható meg.

Az 1923. évi szintezések igazolják azt, hogy a IV. pillér magassága nem felel meg a kiviteli terven lévő méretnek, hanem annál mintegy 6 cm-rel magasabb, továbbá, hogy az újszegedi parti pillér déli része 7 cm-rel mélyebb, mint az északi.

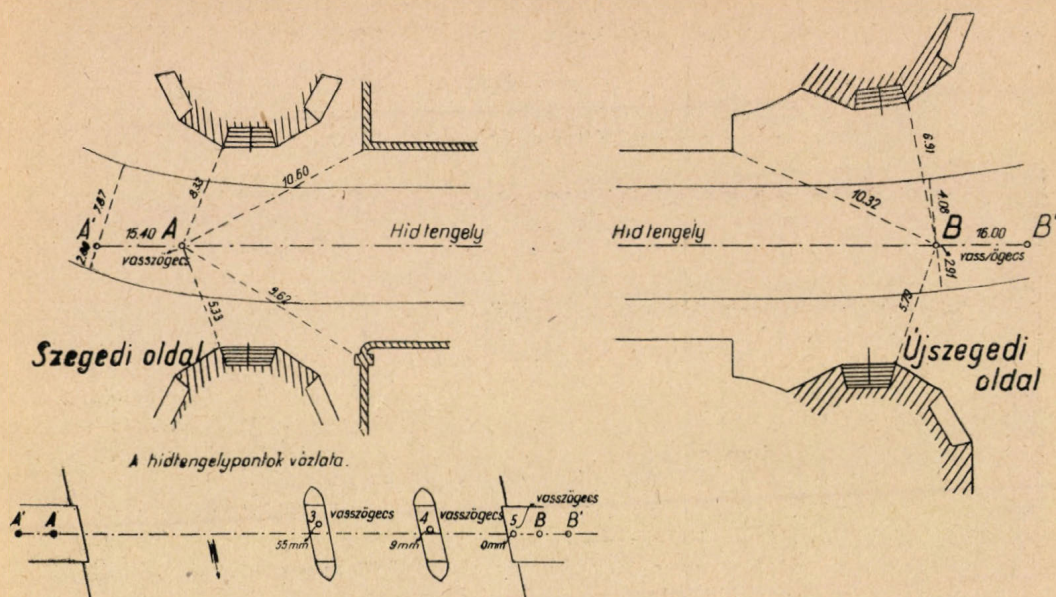
XII. A hídtengely kitűzése.

A hídtengelyre megállapított *irányszög* alapján az I. és az V-ös parti pilléren a *hidőrházaknál* az A és A', illetve a B és B' *vasszögeket* helyeztük el úgy, hogy azok szabatosan a híd tengelyébe essenek. A 10. rajzon feltüntettük a pontokat, továbbá a későbbi felhasználáskor ellenőrzésül, azok vízszintes távolságait az őrházak markáns sarkaitól és a kocsitűt szegélyétől.

A III. és a IV. pillér közepén már ezt megelőzően helyeztünk el ugyancsak *vasszögecskeket* s az ezek bemérése alkalmával megállapított koordinátákból kiszámítottuk szabatos távolságukat a hídtengelytől.

A III. pilléren lévő vasszögecs a hídtengelytől északra fekszik 55 mm-rel, a IV. pilléren lévő pedig ugyancsak északra 9 mm-rel.

A 10. rajzon alul balra találjuk a hídtengelypontok vázlatát az előbbi méretekkel.



10. ábra.

XIII. A pontonhíd építéséhez végzett mérések és eredményei.

A szegedi pontonhíd építéséhez szükséges kitűzési munkálatok céljára az *abc* alapháromszöget tűztük ki s a sarokpontokat betonba helyezett 50 cm hosszú vascsőekkel jelöltük meg. (11. rajz.)

Az *ac* alaphosszúságot lécekkal mértük végig kétszer, a mérési eredmények:

| | |
|--------------|-----------|
| oda mérés | 238,786 m |
| vissza mérés | 238,781 m |
| eltérés | 0,005 m |

E szerint az alapvonalmérés középvetetlen hibája

$$+ 2.5 \text{ mm}$$

ami a hosszúság $1/95.000$ -ed részének felel meg.

Az alapháromszög szögeit a Zeiss-féle T2 teodolittal, 3-szoros ismétléssel mértük meg.

A mérési eredmények az alábbiak:

| | |
|--------------------------|---------------|
| <i>a</i> -nál levő szög: | 76° 57' 40,0" |
| | 33,7" |
| | 35,3" |
| közép: | 76° 57' 36,3" |
| <i>b</i> -nél levő szög: | 33° 03' 14,8" |
| | 16,2" |
| | 17,3" |
| közép: | 33° 03' 16,6" |

A mérések eredményei az alábbiak:

A pont és megjelölése

| | | |
|-----------------|--------------|-------------|
| <i>a</i> vascső | + 1000,000 m | + 300,000 m |
| <i>b</i> „ | + 599,265 | + 392,809 |
| <i>c</i> „ | + 1000,000 | + 538,784 |
| <i>d</i> „ | + 999,584 | + 261,192 |
| kerékvető | + 944,730 | + 283,429 |

A trigonometriai magasságmérés eredménye szerint a *b* vascső felső szintje

0,396 m-

-rel magasabb, mint az a vascső felső szintje.

A fent közölt méréseket és számításokat 1947. évben végeztük. A mérések és számítások végrehajtásában dr. Hönyi Ede vett részt, aki munkáját avval a szabatossággal és avval a nagy munkasebességgel végezte, amely minden elismerést kiérdemel.

Új elrendezésű földmértani logartábla.

Schmidt József.

A földmértani logartábla célja a trigonometriai számításoknak, továbbá a közönséges számokkal való szorzásnak és osztásnak logaritmuskönyv nélkül való gépies és gyors elvégzése, öt számjegy pontossággal.

A több sorban történő logarkifejtésről már jelentek meg közlemények a megszűnt Magyar Mérnök- és Építészegylet *Közlönyében* és a *Geodéziai Közlöny* régebbi számaiban.

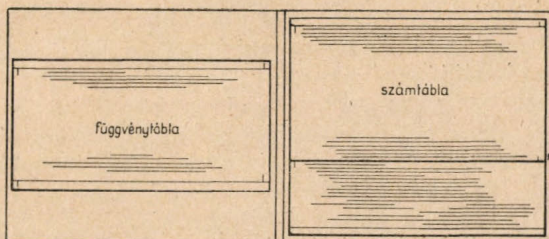
A többsorú logarkifejtés már régebben ismert volt. A fenti szaklapokban ismertetett táblák eredetisége az ú. n. négy „0” vonalas elrendezés volt, mely lehetővé tette a számolási műveleteknek olyan logarkifejtési felületen való elvégzését, amely a régebben használt Scherer-féle táblán ugyanolyan pontosság mellett csupán négyszer akkora felületen volt elvégezhető.

A négy „0” vonalas logartáblát a Magyar Mérnök- és Építészegylet *Közlönyének* 1913. évi XXVI. számában dr. Fasching Antal ismertetette. Az akkori készítmény azonban csak közönséges szorzások, osztások, arányszámítások és hasonló műveleteknek logarlécszerű, öt számjegyű pontosságú elvégzésére volt berendezve. A szögmértani számításoknak öt számjegy pontosságú elvégzését a jóval később szerkesztett ú. n. szögmértani tábla, illetve földmértani tábla tette lehetővé.

Az alábbiakban a földmértani logartáblának egy újabb tökéletesítését ismertetjük, amelyet a szerző egyszerűen azért ért el, hogy a logarhosszúságokat összegező átlátszó tolólapon nem négy, hanem csak két indexet alkalmaz — a tolólap közepére helyezett irányító vonalon. Ez a két index ép úgy kapcsolatba hozható a számlap négy „0” vonalával, amint ez a régi táblákon történt. Ezen elrendezés mellett

a tolólap ú. n. kilengési hibája felére csökken, tehát pontosabb és emellett kezelése is egyszerűbb.

A módosítás előnyeinek részletes megismertetése céljából szükségesnek tartjuk a már régebben megjelent közlemények kivonatos ismertetését, az új kezelés folytán megkívánt módosításokkal.



1. ábra.

A földmérési tábla két kb. 19×29 , illetve 25×29 cm nagyságú fémbeütéses táblából áll, amelyek egy keménykötésű könyvtáblába helyezhetők; illetőleg ennek belső felületére felerősíthetők és könyvszerűleg kinyithatók. Az első tábla a *szögfüggvénytábla*, amelyre az egyes szögfüggvények logaritmusai vannak felrakva akként, hogy a tábla egyik oldalán a *sinusértékek*, másik oldalán pedig a *tangensértékek* vannak felrakva. A másik tábla a *számítábla*, amelyen az $1000-10.000$ közötti számok logaritmusai vannak felrakva.

A számítábla egymagában használható szorzások és osztások elvégzésére, — a szögfüggvénytábla azonban csak a számítáblával kapcsolatosan használható a függvényyszámítások elvégzésére.

A kezelés módja a két táblán hasonló, a különbség csak az, hogy a közönséges szorzás-osztáskor mindkét tényezőt (logaritmushosszúságot) a számítábláról vesszük le és ugyanitt összegezzük, vagy kivonjuk, — a függvényvel való szorzás-osztáskor pedig a szögértéket a függvénytábláról vesszük le és visszük át a számítáblára, hogy itt a numerikus tényezőhöz hozzáadjuk, vagy belőle kivonjuk.

A számítábla kezelésének megismerésével megismerjük egyszersmind a függvénytábla kezelését is. Ezért először a számítáblát fogjuk részletesen ismertetni.

A számítábla megfelelő beosztással és számozással ellátott lap, mely a keménykötésű könyvfedél jobboldali belső lapjára van erősítve. Ezen a számítáblán vannak az 1000 -tól 10.000 -ig terjedő számoknak logaritmusai bizonyos léptékben felrakva hasonlóan, mint az ismeretes logarlécen, csupán azzal az eltéréssel, hogy a megfelelő logaritmikus hosszúságok nem egy hosszú sorban, hanem egymás alatt elrendezett 50 egyenlő hosszúságú, kis sorban vannak kifejtve. A megadott számkörben minden egész számnak egy rovátékvonalka felel meg és minden 10 -ik rovátékvonalka a megfelelő számjeggyel van jelölve. Ilyenképpen a számítáblán a kezdő és a végpont között 9000 rovátékvonalka és 900 számjelzés van feltüntetve. A számozás a tábla alsó harmadában részben ismétlődik.

A számozás az egész táblán végig egyöntetű, az első sorokban

éppen úgy, mint az utolsókban, egy-egy rovátékvonalkának egy egység felel meg, ami a helyes és biztos leolvasást felette megkönnyíti.

A számtábla tartozékai a celluloidlap (*tolólap*) és a *jelzőtű*.

A *celluloidlap* a függvénytáblával egyenlő méretű. Ebbe közepén egy egyenes vonal (irányító vonal) van bevésve és azonfelül két index-szel van ellátva, amelyek a számtábla 2—2 kezdő vonalával fedőállásba hozhatók.

E 4 kezdővonalka alkalmazása abból az egyszerű meggondolásból ered, hogy a számtáblán alkalmazott beosztás mellett minden egyes sornak vége azonos, azaz egyenértékű a következő sor kezdetével, tehát az első sort megelőző sor vége, valamint az utolsó sort követő sor kezdete egyenértékű helyek, vagyis azonosak a logarkifejtés első és utolsó vonalával. Így tehát a számtáblának 4 kezdővonala van, ellentétben a logarléc 2 kezdővonalaival („0” vonalával).

Egyébként a celluloidlap átlátszó, minden beosztás vagy számozás nélkül való lap, mely mint ilyen egyszerűen előállítható, huzamosabb használat után könnyen pótolható és így kényelmesebb segédeszköz, mint a többi eddig ismert számtábláknál alkalmazott áttört tolóka-számlap, mely a számtáblával, illetőleg annak egy részével azonos beosztással (vonalakkal és számokkal) van ellátva.

Ezt a beosztást pótoljuk a jelzőtű alkalmazásával, mely 10—15 cm hosszú, erősen kihegyezett acélsúcsból áll. A jelzőtüvel ugyanis merőlegesen a számtábla felé fektetett celluloidlap ama pontjára mutatunk, mely az osztás, vagy a szorzás egyik tényezőjének megfelel és ezzel a számtábla léptékében a szóban forgó tényező logaritmikus hosszúságát a celluloidlapra átvisszük és most már a szokásos ismert eljárás szerint ezt a hosszúságot a másik tényező logaritmikus hosszúságából kivonjuk, vagy ahhoz hozzáadjuk aszerint, amint osztani vagy szorozni akarunk.

Szorzás. — Az átlátszólap (tolólap) baloldali indexét a szorzás egyik tényezőjére állítjuk (ügyelve arra, hogy a piros irányító vonal pontos fedőállásban legyen az alatta levő logarvonallal). Azután a tűt a sorközépen a számlap azon kezdővonala alá állítjuk, amelyet a tolólap betakar. A beállított és az átlátszó lapba gyengén bemélyített tűt a tolólappal együtt — a kettő viszonylagos helyzetének megváltoztatása nélkül — ugyancsak a sorközépen a szorzás második tényezőjére állítjuk, miközben jobbkezünkkel a tűt a tolólapon tartjuk, balkezünkkel pedig a tolólapot elcsusztatjuk és az eredmény leolvasása előtt irányítjuk, azaz úgy helyezzük el, hogy a tolólap irányító vonala az alatta levő logarvonallal fedőállásban legyen.

A tolólap ezen helyzetében ennek a táblán maradó indexe (ilyen mindig csak egy van) a szorzás eredményére mutat.

Megjegyzendő, hogy ezen műveletet a tolólap másik indexével is elvégezhetjük, amikor is más lesz a betakart és megjelölendő kezdővonal. Az eredmény mindig ugyanaz. Célszerűbb lehetőleg az első tényezőhöz legközelebb eső kezdővonalból kiindulni.

Osztás. — A tolólapot először alapállásba hozzuk, vagyis úgy helyezzük el, hogy az indexek a számlap alsó harmadában a kezdővonallal fedőállásban legyenek.

Ebből az alapállásból kiindulva, az osztás műveletét úgy végezzük

el, hogy a jelzőtűvel a sorszélesség közepén a tolólap gyenge megsűrűsítésével az osztóra mutatunk, ezután a jelzőtűt a tolólappal együtt az osztandóra állítjuk, miközben jobbkezünkkel mindig a tűt tartjuk, balkezünkkel pedig a tolólapot elmozdítjuk és a leolvasás előtt „irányítjuk”, azaz úgy helyezzük, hogy az irányvonal a logarvonallal összeessen. Az osztás eredményét: a hányadost a tolólap ama kezdővonalára alatt kell leolvasni, mely a számtábla határain belül marad.

A leolvasásnál ügyelni kell arra, hogy az eredmény első számjegye a szóbanforgó mező kezdetén álló nagy szám, a második és harmadik számjegye a celluloidlap szóbanforgó kezdővonalára előtt megjelenő, kiírt két kisebb szám, a negyedik számjegye rovatvonalkával van jelölve és csupán az ötödik számjegye az, mely becsléssel állapítandó meg.

Itt csak rá akarunk mutatni még ama körülményre, hogy abban az esetben, midőn egy állandó számmal való ismételt szorzások, vagy osztások végzendők, a művelet a jelzőtű használata nélkül is igen kényelmesen és gyorsan végrehajtható. Ebben az esetben ugyanis az alapállásba hozott celluloidlapra az ismételten használandó számot (szorzásnál az állandó tényező beállítása után a betakart kezdővonalat, osztásnál pedig az osztót) egy kis vonalkával tussal, vagy téntával megjelöljük és most már csak ezt a jelet állítjuk minden egyes esetben a változó második szám fölé (a tű használata nélkül és anélkül, hogy minden egyes esetben az alapállásból kellett volna kiindulnunk); a keresett eredményt mindenkor a számtábla határain belül maradt kezdővonal alatt olvassuk le.

*

A függvénytábla első sorban sokszögmenetek számításánál, azután 1 km-en belüli háromszögelésnél (pontosítás) használható. Célszerűen felhasználható még a géppel, vagy logaritmus könyvből számított magasabb rendű pontok számításainak ellenőrzésére is.

A *sinus táblán* a szögek sinusainak logaritmusai vannak felrakva és pedig 70 fokig percről-percre, 10 másodpercnyi leolvasási pontossággal, 70 fokon túl pedig a kisebb *logaritmus* távolságoknak megfelelően nagyobb intervallumokkal.

A logarhosszúságok felrakása itt is úgy történt, mint a számtáblán, azaz 50 egyenlő hosszúságú sorban, a számtábláéval azonos léptékben. A szögtábla azonban csak $5^{\circ} 45'$ és 90° közé eső szögértékeket tartalmazza. Ezen határok közé eső szögek sinusai ugyanis a 0,1-től 1,0-ig terjedő számkörbe esnek, amelynek kifejtése egy teljes táblát kíván. Az $5^{\circ} 45'$ -nél kisebb szögek sinusai a 0,01-től 0,1-ig terjedő számkörbe esnek, amelynek felrakása a szögtábla ismétlését tenné szükségessé.

Hogy ezt elkerüljük, ezért az $5^{\circ} 45'$ -nél kisebb szögek sinusainak felrakását szintén a szögtáblán végeztük, — percről-percre, és pedig, hogy az új felrakásnak a szögtáblára zavaró hatása ne legyen — akként, hogy a felrakott logaritmus hosszúságokat kis ékalakú jelekkel jelöltük. Minden ékalakú jel egy percnél felel meg.

Hogy az egyes sorokba berajzolt legelső jelek minő szögértékek sinusainak felelnek meg, ezt az illető sorok elején beírt szögszám mutatja. Az ötös és tízes perceket nagyobb ékek mutatják, ezáltal az egyes percek könnyen feltalálhatók.

A perceket mutató ékalakú jelek közötti távolságot $3''$ -ig $10''$ -ekre, $3'$ -tól $5'$ -ig pedig $20''$ -ekre osztottuk fel, így az 5° -nál kisebb szögek beállítását $1''$ középhibával végezhetjük. A jelöltű beállítása úgy az $5^\circ 45'$ -nél nagyobb, mint ennél kisebb szögeknél ugyanazon helyen, a sorköz közepén történik.

A szorzás és osztás elvégzése — épúgy, mint a számtáblán — logaritmus-hosszúságok összeadásán, illetve kivonásán alapszik.

A hosszúságok lemérésére itt is az átlátszó celluloidlap (tolólap) szolgál, amelynek 2 indexe a sinuslap 2—2 kezdővonalával itt is fedőállásba hozható.

A hosszúságok átvitele az átlátszó lapra — összeadás vagy kivonás céljából ép úgy történik, mint a számtáblán. A *sinus*-szal való egyszerű szorzáskor, vagy osztáskor $\left(a \sin \alpha \text{ és } \frac{a}{\sin \alpha}\right)$, először mindig a *sinus*-táblán keressük meg a *log. sin* α -nak megfelelő hosszúságot és ezt a tolólappal visszük át a számtáblára, ahol az eredményt közvetlenül leolvashatjuk. Vagyis az $a \sin \alpha$ művelet elvégzésekor az átlátszó lap egyik indexét (rendesen a bal indexet) a *sinus*tábla α szögére állítjuk; ezután az átlátszó lapot balkézzel leszorítva, a szöglapnak azon kezdővonalára, melyet a tolólap betakar, a jelöltűt (gyengén bemélyítve) ráhelyezzük. Ezután a tolólapot a tűvel együtt akként toljuk át a számlapra, hogy a tű a számlap „a” számára mutasson és a tolólap piros vonala a számsorok egyikével fedő állásba jusson. Ezen eltolás után a tolólap 2 indexe közül mindig csak egyik marad a számtáblán és ez az eredményre mutat. Ha az első beállítást (*log sin* α) a tolólap baloldali indexével végezzük, az esetben mindig a 90° lesz a tűvel megjelölendő kezdővonal.

Például állapítsuk meg $338,45 \sin 32^\circ 14' 20''$ szorzat értékét. Az átlátszó lap felső baloldali indexét a *sinus*tábla $32^\circ 14' 20''$ beosztására állítjuk, azután a tábla betakart kezdővonalát (90°) tűvel megjelölve a tolólapot a tűvel együtt akként toljuk át párhuzamosan a számtáblára, hogy a tű a számtábla $338,45$ beosztására mutasson. A tolólapnak a számtábla határain belül maradó indexe az eredményt: $180,54$ -et mutatja. Az $\frac{a}{\sin \alpha}$ művelet elvégzésekor a tolólapot a *sinus*táblán először

alapállásba hozzuk, vagyis a tolólapot úgy helyezzük rá a *sinus*táblára, hogy ennek kezdővonalai az átlátszó lap 2 indexével fedőállásba kerüljön és hogy az α szöget a tolólap takarja. (Ha nem takarja, úgy a másik kezdővonalból indulunk ki.)

Ezen alapállásban a tolólapot balkezünkkel kissé leszorítva, a tűt a *sinus*tábla α szögére állítjuk, és a tolólapot a tűvel együtt akként toljuk át a számlapra, hogy a tű a számlap „a” jegyére mutasson. A tolólapnak a számlap határain belül maradó indexe az osztási eredményre mutat.

A szögmértani táblával többszörös szorzási és osztási műveletet is végezhetünk anélkül, hogy a közbeeső eredményeket le kellene olvasni.

Pl. $\frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$ műveletet (oldalhossz-számítást) úgy végezzük el, hogy a tolólapot a *sinus*táblán alapállásba hozva a tűvel β szögére mu-

tatunk; most a tolólapot párhuzamosan úgy toljuk el a sinustáblán, hogy a tű az α szögére mutasson. Ezzel a szögek sinusainak elosztását már elvégeztük és most már nem kell mást tenni, mint a tolólapot balkezünkkel kissé leszorítva a tűt a tolólappról felemeljük és a szöglap betakart kezdővonalára állítjuk, azután a tolólapot a tűvel együtt átcúsztatjuk a számlapra úgy, hogy a tű a számlap „a” beosztására mutasson.

E helyzetben a számlap határain belül maradó index a keresett eredményt mutatja. Pl.

$$\frac{542.70 \times \sin 26^\circ 12' 10''}{\sin 42^\circ 26' 30''}$$

A tolólapot a szögábrán alapállásba hozzuk és ezen alapállásban a tűvel $42^\circ 26' 30''$ -re mutatunk, azután a tűt a tolólappal együtt (a kétféle viszonylagos helyzetének megváltoztatása nélkül) $26^\circ 12' 10''$ -re állítjuk. A tolólap ezen helyzetében a tűt leemeljük és a tűt a szögábra azon kezdővonalára tesszük, melyet a tolólap betakar (felső bal), azután a tűt a tolólappal együtt a számtábla 542.7° beosztására állítjuk. Az eredményt a számtáblán maradó index mutatja: 355,09.

Ha a szögértékek osztásánál az irányító vonal lekerül a tábláról, úgy az irányítást a tolólap szélével végezzük.

Egyéb szögmérési számításnál figyelembe kell venni, hogy $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sin (90 - \alpha)}$$

Hogy az eredmény hány egész számból áll, vagyis a tizedespont helyének meghatározása általában miként történik, ezt egy gyakorlati példával világítjuk meg.

Pl. $244,2 \times \sin 25^\circ 10'$ művelet elvégzése után a számtáblán sorban leolvassuk a következő számjegyeket 10384. — Hogy itt mennyi az egész számjegy, azt következőkép állapítjuk meg. Az $5^\circ 45'$ és 90° közé eső szögek sinusai a 0,1 és 1,0 számhatárok közé esnek. Annyit egyszerű rátekintéssel is megállapíthatunk, hogy a szorzás egyik tényezője a jelen esetben 0,4 körül van és mivel a szorzás másik tényezője: 244,2, ezért a kijött eredmény: 103,84 — három egész számjegyből áll.

Hasonlóképen a $0^\circ 35'$ és $5^\circ 45'$ közé eső szögek sinusai a 0,01 és 0,1 számhatárok közé esnek, amelyeknek első számjegyeit a számtáblán közvetlenül leolvashatjuk és így a tizedespont helyét megállapíthatjuk.

$0^\circ 35'$ -nél kisebb szögértékek sinusai a táblán nincsenek felrakva, ezek sinusainak számértékét könnyen leírhatjuk, csak az 1 percre eső különbséget (0,000291) kell megszorozni a percek számával.

A tangenstábla elsősorban a délszög gyors meghatározására, illetőleg közvetlen leolvasására szolgál, a megadott összrendezők alapján.

A 90° -ig terjedő tg értékek teljes felrakásához két táblára lenne szükség. Hogy ezt elkerüljük, egyéből felhasználjuk a tg felrakás egy kedvező sajátosságát. A tangenstáblának u. i. az a jellemző tulajdonsága, hogy 45° -ig a felrakott tangensértékek intervallumai egy bizonyos geometriai arányban állandóan csökkennek.

45° -on felül pedig ezen intervallumok ugyanezen geometria arányban *növekednek*.

U. i. a 45° -on felüli szögek logaritmusainak a táblára felrakott értékei és a 45° -on aluli szögek logaritmusainak a táblára felrakott értékei, páronként mint szögek és kiegészítő szögek $tg\ \alpha$ és $tg(90 - \alpha)$ egymásnak sugárirányú tükröképei, amely sugarak a két tangenstaola síkjának középpontján mennek keresztül.

A tangenstáblának ebből a sajátosságából következik, hogy ha a fedőlap alapállásában a tüt egy bizonyos $tg\ \alpha$ szögjelzésre helyezzük, azután a fedőlapot 180° -kal elfordítva, ismét alapállásba hozzuk, úgy ezen a második alapállásban a tüt a $tg(90 - \alpha)$ szögértékre mutat. [Ezen $(90 - \alpha)$ szög azonban csak a következő táblasíkon lenne leolvasható, amennyiben a felrakást 45° -on túl is folytattuk volna.]

Az elmondottakból következik, hogy a 45° -on felüli szögek tangensértékeinek felrakását — amely ismét egy teljes tábla felszerelését tenné szükségessé — elhagyhatjuk, mert a 45° -on felüli tangensszögeket közvetlenül leolvashatjuk 45° -on aluli tangensszögek útján, mint ezeknek kiegészítő szögeit.

A tangenstáblán a szögfelrakás $5^\circ 43'$ -al kezdődik és tart egészen 45° -ig. Ezen határok közé eső szögek tangensei u. i. a $0,1$ -től $1,0$ -ig terjedő számkörbe esnek, amelynek kifejtése egy teljes táblát kíván.

A $5^\circ 43'$ -nál kisebb szögek tangenseinek felrakását szintén a tangenstáblán végeztük, percről-percre, úgy, mint a sinustáblán.

Az ötös és tízes percek nagyobb ékek, az egyes percek a kisebb ékek mutatják. A percek mutatató ékalakú jelek közötti távolságot 3° -ig $10''$ -re, 3° -tól pedig $20''$ -re osztottuk fel, így az 5° -nál kisebb szögek beállítását $1''$ középhibával végezhetjük. A jelzött beállítása úgy az $5^\circ 43'$ -nél nagyobb, mint ennél kisebb szögeknél ugyanazon helyen a sorköz közepén történik.

A 45° -ig terjedő felrakásnak a délszögszámítás, illetve a számítás ellenőrzésének szempontjából az a fontossága van, hogy az összerendezők osztásánál mindig a kisebb értéket osztjuk a nagyobbal, hogy az egységénél kisebb számot, azaz a tg táblán közvetlenül leolvasható szögértéket kapjunk.

A tangenstáblával való számításoknál a tizedespont helyének megállapítását illetőleg figyelembe kell venni, hogy $0^\circ 35'$ és $5^\circ 43'$ közé eső szögek tangensei a $0,01$ és $0,1$ — az $5^\circ 43'$ és 45° közé eső szögek tangensei a $0,1$ — $1,0$, a 45° és $84^\circ 17'$ közöttieké az 1 — 10 , a $84^\circ 17'$ és $89^\circ 25'$ közöttieké pedig a 10 és 100 számhatárok közé esnek.

Megjegyzések:

1. A logartábla első sorban a földmértani számításokban használható gazdaságosan, ahol 5 számjegynél pontosabb eredményre nincs szükség (részletes felmérések, parcellázások, ellenőrző számítások). Ily esetben használata és kezdése — némi gyakorlat után — lényegesen gyorsabb, mint a számológépeké, bárhova könnyebben magunkkal vihetők és lényegesen olcsóbban beszerezhetők.

2. A *tolólapot* mindig ugyanazon lapjával helyezzük a táblára és

nem átfordítva, mert így nem is hozható alapállásba. (A tolólap egyik sarkában látható kis piros jel felül és balra legyen.)

3. A *tolólap* anyaga celluloid, mely a változó hőbehatásoktól esetleg deformálódik, ezért használat után takarjuk be.

4. Ha idők folyamán a tolólap összehúzódása miatt az indexek helyzete a táblák kezdővonalaihoz képest megváltozik úgy, hogy alapállásban az indexek és kezdővonalak nem hozhatók fedőállásba, akkor az egyik indexet letöröljük és megfelelő helyére rajzoljuk.

Újítómozgalom a FŐTI Városmérési Főosztályán.

Dr. Hönyi Ede.

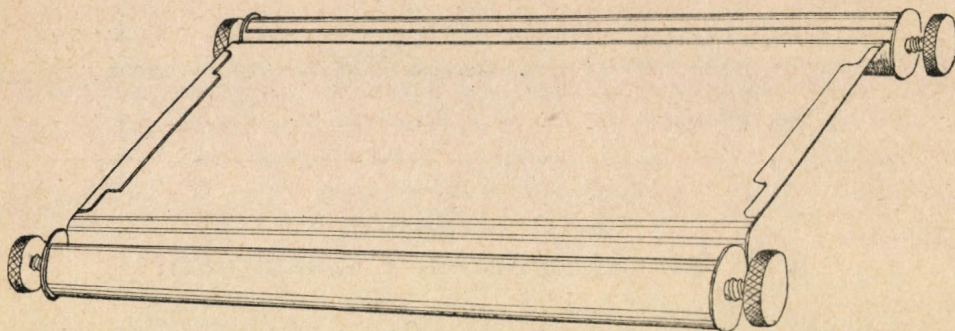
Budapest felmérését 1949 február 1 óta a Fővárosi Tervező Intézetben megalakított Városmérési Főosztály végzi. A Főosztály működése kiterjed az összes városmérési munkákra és a birtokelhatárolás előkészítésétől kezdve a munkarészek telekkönyvi átadásához szükséges terület-összeállításokig minden munkát maga végez. A műszaki személyzet mérnökökből, technikusokból és figuránsokból áll, akik lelkes igyekezettel végzik komoly munkájukat. A különféle munkanemekben alkalom adódott a brigád-munka kialakítására s az egyes csoportok brigádjai szép eredményeket értek el teljesítményeikkel. Számos egyéni verseny is folyik az azonos munkát végző mérnökök és technikusok között.

A többletermelésre irányuló igyekezet új ötleteket eredményezett a munka egyszerűsítése terén, s az erre irányuló és megvalósított ötletekből, az újításokból ismertetünk most néhányat. Főleg azokat ismertetjük, amelyek a geodéziai munkával foglalkozó kartársakat általánosan érdekelhetik. Ezek az újítások nem mind eredeti ötletek, olyan is akad közöttük, amelyek már ismertek voltak, de amelyek célszerű alkalmazhatását most felismerve vezettünk be, vagy amely ötleteket saját céljainknak megfelelően módosítva alkalmazunk. Az elfogadott újítások részben a felmérés külső munkájának egyszerűbbé tételét, részben az irodai feldolgozás gyorsítását szolgálják.

A vízszintes részletmérés eredményeit a helyszínen egyes lapokra vagy füzetekbe rajzoltuk s ezekből az ú. n. manuálékból szerkesztettük meg az irodában a telektömböket feltüntető tömbrajzokat. Ennek az eljárásnak hátránya az volt, hogy az egyes lapok alapján a felméréendő terep egységes áttekintése nem volt biztosítható, kimaradhatott valami felméréendő objektum, vagy méret és a bemérés eredményeinek ez a széttagoltsága megnehezítette és időbelileg is elnyújtotta a bemérő munkáját. De különösen sok időt igényelt e lapok alapján az irodai feldolgozás. Az irodai számításokat és rajzolásokat általában nem az a technikus vagy mérnök végezte, aki bemérte a tömböt s így a mozaiklapok összeállítása sokszor nehézségeket okozott a számításoknál, illetve a tömbrajzok megszerkesztésénél.

Ezeket a nehézségeket segítette a *Mühlhauser Lajos* technikus által

szerkesztett kézi rajztábla, az ú. n. *tereptábla*. (Lásd 1. ábra.) Rajztáblájának megoldása hasonló a fényképezőgépek filmtekercs elhelyező



1. ábra.

és továbbító berendezéséhez. A tereptábla egy könnyű fémből készített és a papiros szélének megvédése céljából kétoldalt visszahajtott sík tábla, amelynek végén egy-egy hengert találunk. A hengerekben forgatható alumíniumtengely foglal helyet. Ezeknek a tengelyeknek nyílásába helyezhető a rajzpapír-csík két vége. A papír be- és kiszerelése céljából a tengelyek egy kívülről kezelhető tárcsa elfordításával kiemelhetők, egyébként azokat a végükre szerelt rugók tartják nyugalmi helyzetben. A felcsavart papiros továbbítása a megfelelő henger egyszerű forgatásával a tengelyre szerelt forgatókorong segítségével történik. A rajztábla egyik hengerébe kb. 12 m hosszú és 41 cm széles papiros csavarható fel és csavarható át folyamatosan a másik tengelyre. A rajzolásra és írásra rögzített állapotban a tábla sík részén a papírlap 40×25 cm-es darabja fekszik simán kifeszítve.

A tereptábla előnyösen használható szeles időben is. A papír szélét a rajztábla visszahajtott széle lefogja, s így nem mozgatja a szél a papírlapot. A rajzlap nagy hossza megadja az áttekinthető, összefüggő helyszíni tömbrajzok elkészítésének lehetőségét. A tereptábla alkalmazásával tehát az előzőekben vázolt nehézségeket kiküszöbölhetjük.

Csaba Ferenc technikus a tahimetrikus mérések eredményeinek térképi felrakásához szerkesztett *szög- és távolságfelrakó készüléket*. (Lásd 2. ábra.) Az elv nem új, mert az a közismert teljes körű tahiméteres szögfelrakóknak csupán egyszerűsített kivitelű átdolgozása.

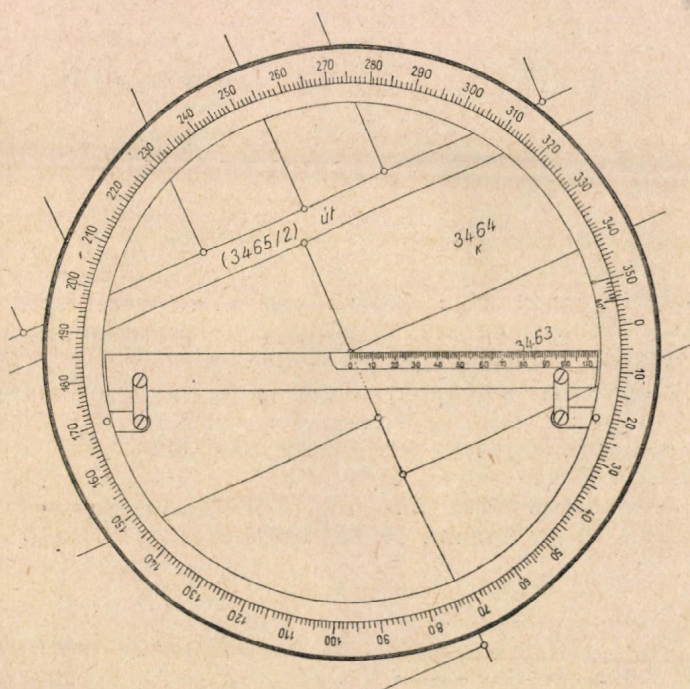
A szögfelrakó két egymásban futó körgyűrűből áll. A külső körgyűrűn van az 1° -os főskála osztás. A belső körgyűrűn a $10'$ érzékenységű nóniusz és a kör átmérőjének vonalában a távolság felrakására szolgáló beosztás. A külső gyűrű anyaga réz, a belső gyűrűé bronz, a hosszbeosztást feltüntető léptéké celluloid. A távolság felrakására szolgáló beosztás legkisebb része az 1:1000 méretarányú térképek készítéséhez 1 mm. Annak tizedrésze becsülhető, ami 10 cm-nek felel meg a valóságban. A lépték rugós felerősítésű s így mindig szorosan ráfekszik a rajzlapra, ami a 0,1 mm becslését igen megkönnyíti. A szögfel-

rákó súlya feleslegessé teszi a rajzpapíron a tűkkel való rögzítést. A hosszlépték központosítását 2 ellencsavarral végezzük el.

Ami ebben a szögfelrakóban új, az az egyszerű kivitel és a célszerű, csak a szükséges pontosságot adó körösztás és hosszbeosztás. A szögfelrakót — mint említettük — csak a tahimetrikus magasságmérések rétegvonalas térképeinek szerkesztésére használjuk, arra pedig pontossága teljesen megfelelő.

Használata abból áll, hogy a műszerálláspont térképezett helyén

Csaba-féle tahimetrikus szögfelrakó

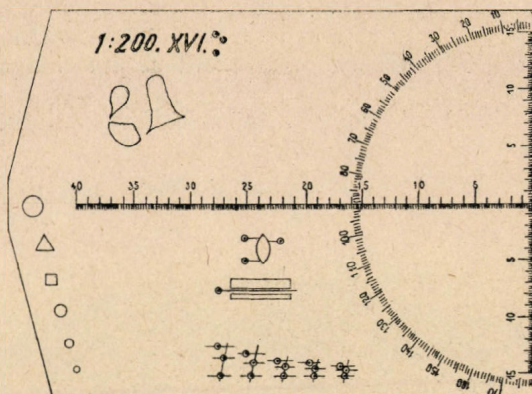


2. ábra.

elhelyezzük a szögfelrakót úgy, hogy a lépték 0 pontja az állásponton legyen, a lépték éle pedig — a nóniusz indexnek a tájékozó szögre való beállítása mellett — a tájékozó irányul szolgáló alappontra mutasson. Ezzel a szögfelrakót tájékoztuk és a mért pontok felrakása az ismert módon történik. Kezelése egyszerűbb, mint az általánosan használt Szóvátay-féle szögfelrakóé, így gazdaságosabb is, azonban hangsúlyozzuk, hogy csak rétegvonal szerkesztés céljára elegendő a pontossága.

Pászthy Miklós technikus „T” felrakóján a szögfelrakás lehetőségével kiegészítette a Schleicher-féle ortográfot. (Lásd 3. ábra.) A helyszíni vázlatrajzok és az irodai tömbrajzok megszerkesztésének jó segéd-eszközét vezette be ezzel. A tömbrajzok nem szigorúan léptékhelyesek, ott kisebb pontosságú felrakás és kisebb torzítás megengedhető. Ezek-

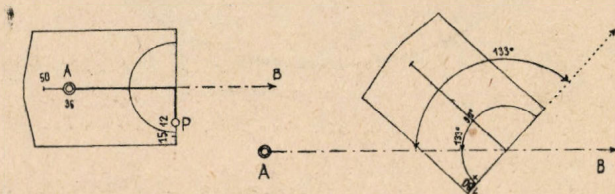
nek a felrakási munkáknak végzésére kiválóan alkalmas a „T” felrakó. 23×17 cm celluloidlapon két egymásra merőlegesen elhelyezett osztás



3. ábra.

van T alakban, ezenkívül az ábrának megfelelően fokbeosztás is található rajta. Használhatjuk a tömbrajzoknál a derékszögű és a poláris méréssel meghatározott részletpontok felrakására.

Derékszögű méréssel bemért pontok felrakásánál úgy helyezzük el a felrakót, hogy a középső beosztáson a mérési kezdőpont a felrakandó pont abszcisszájának megfelelő helyre mutasson, azután a megfelelő ordinátabeosztásról a pont helye megrajzolható. Poláris bemérésnél a fokbeosztást a kezdőiránytól a mért szöggel elforgatva, megkapjuk a poláris irányát s itt az ordináta beosztásról lemérjük a távolságot. (Lásd 4. ábra.)



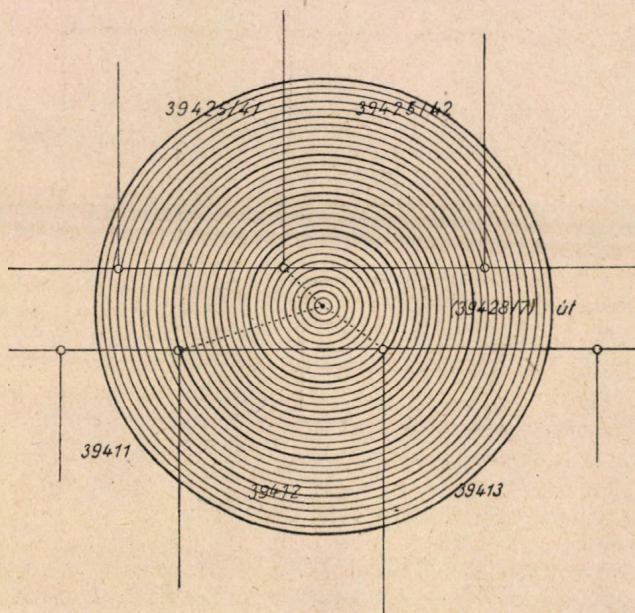
4. ábra.

Kiegészítette még a „T” felrakót különféle jelek és elővonalozások kivágott formáival (ú. m. É irány, alappontok különféle jelöléseivel, különféle nagyságú betűk megírásához szükséges elővonalozás mintájával, dűlt betűk dűlési irányával).

Használata egyszerű, könnyű, olcsó eszköz, s a rajzpapíron sok mérési munkát lehet vele megtakarítani.

A magasságmérésben a szintezett utcategelypontok vízszintes hely-

zetét a birtokhatárpontokhoz, vagy egyéb jellemző, a térképen megtalálható pontokhoz mérjük be. Ezeknek a bemért pontoknak térképen való feltüntetésére készítette Pászthy Miklós a *körléptéket*. (Lásd 5. ábra.) A körlépték celluloidból készült lemez, melynek aljára koncentrikus körökből álló beosztást karcolt. A körök középpontja helyén kis lyukat találunk. A körök sugarainak különbségét a kívánt méretaránynak megfelelően választjuk. Pl. 1:1000 méretarány esetén 1 mm, ami a valóságban 1 m-es távolságnak felel meg. A kerek számú méterek köréit számozzuk.



5. ábra.

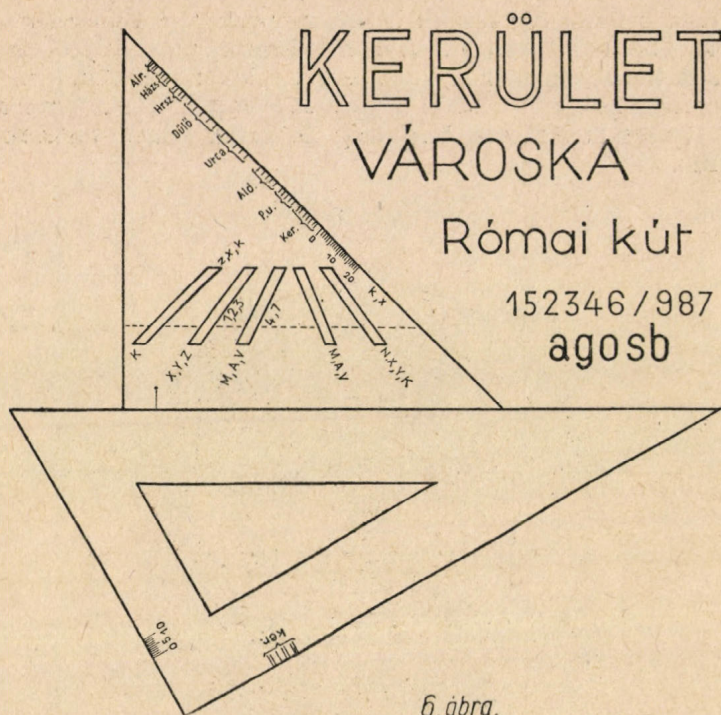
Használatkor a körléptéket úgy állítjuk a térképre, hogy az ismert meghatározó pontokon a mért távolságértékek legyenek a körléptékről leolvashatók, s ebben a helyzetben a körközéppont helyét leszúrva, a meghatározandó pontot térképeztük.

Kisebb pontosságot kívánó térképezéseknél igen jól alkalmazhatjuk a körléptéket. Előnye a körléptéknek még az a lehetőség is, amit azzal nyújt, hogy a meghatározott távolságok beállítása után az ellenőrző méretek is azonnal leolvashatók. Használata gyors és kényelmes.

Ugyancsak Pászthy Miklós a Szepessy-féle tahiméter mérési eredményeinek irodai feldolgozásához *szorzótáblát* állított össze. Ebből a speciális táblázatból a magasságok számításának képletében szereplő szorzatok értékei egyszerű kiírással és azok összegezésével megkaphatók.

Kalata Gyula technikus *írásfelrakó háromszögpárt* szerkesztett. (Lásd 6. ábra.) Budapest új felmérésének térképszelvényein körzővel

és vonalzóval rajzolható betűtípusokat használunk. Ezeknek a típusoknak egyszerűbb és gyorsabb rajzolását végezhetjük el az írásfelrakóval.



6. ábra.

A háromszögpár celluloidból készül és egy 45° -os és egy 30° -os háromszögből áll. A 45° -os háromszög átfogóján osztások vannak az írások elővonalozásához. A háromszögön belül különféle dőlésű rajzoló éleket találunk kivágva, melyek a megfelelő betűelem megrajzolásához tartozó betűkkel, illetve számokkal vannak megjelölve.

Használatkor a 45° -os háromszög átfogóján lévő, a kívánt betűtípusnak megfelelő osztások és a 30° -os háromszög befogóján lévő noniusz 0 vonásának, mint indexnek felhasználásával a szükséges írásméretet a 30° -os háromszög másik befogója mellett ceruzával elővonalozzuk. Az előírt betűméretekkel eltérő betűk elővonalozására a 45° -os vonalzóon lévő mm-es osztás és a 30° -os háromszögön lévő noniusz szolgál. Ezután a betűket ceruzával felvázoljuk az elővonalozásba. A szükséges köröket és köríveket 0-ás körzővel megrajzoljuk az elővonalozott körív középpontok vonalán. Most a 45° -os háromszögnek az ábrán szaggatott vonallal jelzett alapvonalát az írás alsó vonalára illesztjük és a 45° -os háromszöget a 30° -os mellett jobbra-balra tologatva a szükséges betűelemhez tartozó rajzólelet a kellő helyre csúsztatjuk.

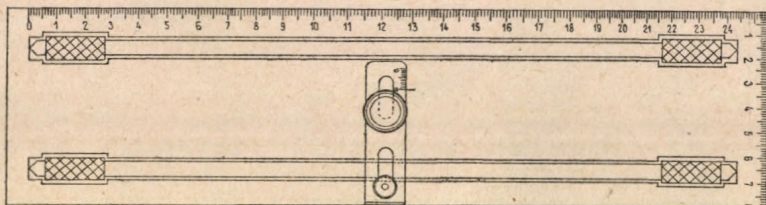
A rajzólelet sávja a háromszög alsó síkjában 0,5 mm-re be van mélyítve. Így a háromszög a még nedves tus felett eltolható és a betűk, illetve számok folyamatosan kialakíthatók.

A 30° -os háromszög hosszabb befogóján lévő osztás az üres nagybetűk függőleges betűjeleinek megírására szolgál. Az írásfelrakó 25 mm-es betűnagyságig használható.

Az írásfelrakó használata gazdaságos, a betűk egyöntetűségét eredményezi és csaknem teljesen függetleníti a megíró személyi készségeitől.

Kovács István technikus a rajzi munkát gyorsítja meg gördülő (sraffozó) vonalzójával. (Lásd 7. ábra.) A fémvonalzóba két tengelyt szerelt, amelyekre 2—2 gumihenger van elhelyezve. Ezek pontosan

„Kovács”-féle gördülő vonalzó (sraffozó).



7. ábra.

egyenlő átmérőjűek, úgy, hogy a vonalzó azokon való elgörbülése párhuzamos elmozdulást eredményez. Ezenkívül egy vonalkázást beállító szerkezetet találunk a fémvonalzó közepére szerelve, melynek segítségével 0—10 mm-ig bármilyen közű vonalozást egyenletesen végezhetünk.

A vonalzó oldalbeosztása 0—50 mm-ig bármilyen közű párhuzamos vonal megrajzolására alkalmas. Használhatjuk azonkívül állandó felírások, jelek és vonalak párhuzamos továbbítására, ha azokat celluloidlapból kivágva hozzáerősítjük a fémvonalzóhoz. Rendkívül egyszerűen kezelhető, igen jó segédeszköze a rajzolóknak.

Zeke József szakmunkás olyan acélszalag lyukasztókészüléket szerkesztett, amellyel az eltört mérőszalagokat a helyszínen lehet kijavítani. A szalagtörés igen gyakran okoz kellemetlenséget a mérés folyamatosságában. Ez az újítás kiküszöböli ezt a kellemetlenséget. A készülék a háztartásokban alkalmazott kézi diótörőhöz hasonló kb. 25 cm hosszú karokkal készül. Az eltört szalagvéget és a javításra elhasználandó szalagdarabot befogva a készülékbe, a karok összenyomására 2 mm átmérőjű szabatos szélű lyukakat kapunk, amelyek mindjárt a helyszínen összeszegezeshetők. Az eddigi nehézkes javítás lényegesen egyszerűbb és gyorsabb lesz a használatával a pontos szalagtoldás kényelmesen biztosítható.

Hajnal Sándor mérnök az elkopott számozású zsebszalagok megjavítását a Zeke-féle szalaglyukasztó-készülékkel hajtotta végre. A kereskedésben újabban kapható zsebszalagok számozása a használatban

hamar lekopott, ezzel a szalag használhatósága megszűnt. Ezen a hibán segít azzal az eljárással, hogy a kerek deciméterek helyén — a mezei szalagok számozásához hasonlóan — 2 mm-es lyukat, az 5 deciméterek helyén kis réz-szegecseket, a méterek helyén a megfelelő méterszámot feltüntető számlapocskát helyez el. Újításával a szalagok élettartamát lényegesen meghosszabbította, használatban ez a megoldás bevált, mivel a dm-en belül a cm becslés megbízhatóan elvégezhető, s további számlakopás nem következhetett be.

A bemutatott példákból láthatjuk, hogy sok igen hasznos gondolatot termel ki a munka eredményesebbé tételének vágya, s ezek a ma már használatban lévő újítások újabb ösztönzéseket adnak a további újításokhoz.

Szemle.

1. Hans Boltz professzor és munkássága.

Ervin Gigas professzor, a bambergi Földmérési Intézet igazgatója az intézet közleményeiben megemlékezik az 1947 március 23-án Potsdam—Babelsbergben elhunyt dr. Hans Boltzról, a berlini Tudományos Akadémia Geodéziai Intézetének ügyvezető igazgatójáról.

Boltz — Eggert professzor halála óta — a felsőgeodézia német atyamestere volt, akinek hírneve túlterjedt Németország határain. 1883 május 9-én Elbingben született. Königsbergben és Berlinben matematikát, geodéziát és csillagászatot tanult, majd Helmert professzor 1911-ben munkatársának hívta meg a porosz geodéziai intézetbe. Előzetesen már 1908—1910 években mint tanársegéd működött ott. 1927-ben osztályvezetőnek nevezték ki, 1946 elején pedig átvette a világhírű intézet vezetését. 1932—1934. években kint járt Törökországban és közreműködött a török földmérés megszervezésében.

Élete fő munkássága a geodéziai hálózatok kiegyenlítésének vizsgálata és ezzel kapcsolatban a róla elnevezett kiegyenlítési eljárás kidolgozása, továbbá földrajzi koordináták számítására alkalmas táblázatok szerkesztése volt. Munkájának elismerése csak nehezen bontakozott ki, ő azonban meggyőződve annak értékéről, nem vesztette el munkakedvét. Sajnos, eljárásának az egész világon való elterjedését nem érthette meg, pedig részére a legnagyobb megelégedést az adta volna, ha látja, hogy a nagy kontinentális világátfogó háromszögelési hálózat megvalósuláskor eljárása alkalmazásra kerül.

Munkatársa, Jenne professzor működése hozzájárult ahhoz, hogy a Boltz-féle kiegyenlítési eljárás a gyakorlatban könnyebben elterjedhessen.

Boltz geodéziai intézeti munkásságának első évében szoros kapcsolatba került Krüger professzorral, aki feladatául hagyta, hogy C. F. Gauss hagyatékát vizsgálja át, az utókornak való átadás céljából. Gauss hagyatékának és Krüger két csoportban való kiegyenlítésének tanulmányozása igen jó szolgálatot tett Boltz számára, kiegyenlítési eljárása kidolgo-

zásában. Boltz eljárásának nemcsak az a nagy előnye, hogy nagyszámú feltételi egyenlet esetén is szigorúan a legkisebb négyzetek elvé érvényesül, hanem az a lehetőség, hogy később is bekapcsolhatunk feltételeket a kiegyenlítésbe anélkül, hogy azért az egész számítást meg kellene ismételni.

Boltz eljárása nélkül az európai centrális hálózat kiegyenlítése — melyet a bambergi földmérési intézet 2 év alatt kiszámított — nem készült volna el ilyen gyorsan. Ezenkívül ezzel az eljárással válik lehetővé a kontinentális hálózatok kiegyenlítése. Ezek az eredmények biztossítják Boltz professzor részére a geodézia történetében az őt megillető kitűnő helyet.

Táblázatai a földrajzi koordináták numerikus számítását háromszög oldalak hosszából és azimutjából teszik lehetővé és azok széleskörű alkalmazást találnak. Hasonlóképp használják táblázatait a földrajzi koordinátákból való Gauss—Krüger-féle koordináták számítására.

Boltz professzor közreműködött a német birodalmi felmérés háromszögelési osztályának munkájában és sok jelentős mérésben vett részt. Korai halála kétszeres vesztesége a német geodéziának, mert a német földmérés új felépítésében tanácsaira nagy szükség lett volna. Nevét a háromszögeléssel foglalkozók mindig tiszteletben fogják tartani és halálával fognak róla megemlékezni.

* * *

Helmut Wolf cikket közölt a bambergi földmérési intézet közleményeiben „A Boltz-féle kiegyenlítés helyzetéről az egymástól függő ismeretlenek kiegyenlítésének számításában” címen.

Ebben megkísérli a Boltz-féle kiegyenlítés szemszögéből megvilágítani egymástól függő észlelésekre vonatkozó kiegyenlítés minden más eljárását. Különösen megmutatja, hogy a pótkorrelátákkal és az átalakított normális egyenlet együththatókkal kényelmesen és egyszerűen előállítható minden más kiegyenlítési forma. Így kimutatja, hogy Krovác, Krüger, Gruber, Friedrich, Schleiermacher, Eggert, Besser stb. eljárások belső rokonságban vannak a Boltz-féle kiegyenlítő eljárással.

Vizsgálatait tizenkét fejezetre osztva tárgyalja. Az egyes fejezetek rövid ismertetését római számokkal jelezve közöljük.

I. A bevezetésben megjegyzi, hogy a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítés két fajtáját különböztetjük meg: közvetlen mérések és közvetett mérések kiegyenlítését.

A közvetlen mérések kiegyenlítésében Boltz eljárása — különösen a háromszöghálózatok kiegyenlítése esetében — megkülönböztetett helyet foglal el. Eljárása segítségével az egyes problémák sorsát lehet egymással összefüggésbe hozni és Wolf kimutatja, hogy ezek között a problémák között milyen sok rokon vonatkozást találunk.

II. Általánosságban ismerteti a közvetlen mérések kiegyenlítését egymástól függő ismeretlenekkel: a korrelálás kiegyenlítést.

III. Bemutatja, hogy Boltz — csakúgy, mint Krüger — két csoportra osztja a feltételi és a normális egyenleteket, s azokat egymással kapcsolatba hozva, számítja ki a végleges korrelátákat, a javításokat és

a kiegyenlített értékeket. Ha újabb feltételeket kell a kiegyenlítésbe bevonni, akkor az eddigi eredményeket az első csoport részeredményeinek foghatjuk fel és az újonnan hozzákapcsolt feltételek adják az új második csoportot.

IV. A Krovác-féle módszer, ámbár más elvek alapján, de ugyanarra az eredményre jut, mint Boltz. A számítás végrehajtásában a lényeges különbség az, hogy Krovác a második csoportból mindig csak egy újabb normális egyenletet kapcsol be a kiegyenlítésbe. Ezáltal az átalakított normális egyenlet rendkívül egyszerű formát kap és az egyenletrendszer megoldása az algoritmushoz hasonló módon mechanikusan történik. Azonban, mivel mindig csak egy normális egyenletet kapcsol a kiegyenlítés második csoportjába, ezért több a számítási munka, mint a Boltz-féle eljárásnál.

V. Krüger kimutatta, hogy az átalakított tiszta tagokat nem csak az eredeti tiszta tagokból, hanem a következő módon is levezethetjük: kiegyenlítjük az első csoport feltételeit, mintha a második csoport nem is lenne, ezzel megkapjuk az előzetes korrelátákat és javításokat. Ezeket az értékeket az eredeti feltételi egyenletekbe helyettesítve, az átalakított tiszta tagokat kapjuk.

VI. A Krüger-féle levezetéssel előállított normális egyenletek azonosak a Boltz-féle átalakított normális egyenletekkel, a második csoport korrelátáinak redukálása és az első csoport korrelátáinak kiküszöbölése után.

VII. A Boltz-féle kiegyenlítés második csoportjának átalakított feltételi egyenletei szabad függvényekként foghatók fel az első csoport feltételi egyenleteivel szemben. Ugyanez vonatkozik a megfelelő normális egyenletekre is. Ezen az alapon az átalakított normális egyenletek önmagukban megoldhatók és nem szükséges az első csoport normális egyenleteivel együtt kezelni azokat. Kimutatja az átalakított normális egyenletek együtthatóiból való középhiba számítás lehetőségét.

VIII. Ha azt a függvényt, melynek középhibáját keressük, mint feltételi egyenletet fogjuk fel és a normális egyenleteket ennek bevonásával képezzük, akkor az ebből meghatározható középhiba ugyanaz lesz, mint a VII. pontban kimutatott középhiba.

IX. Az általánosított Schreiber tétel alkalmazásával a súlyokat úgy lehet kiválasztani, hogy a kiegyenlítéssel meghatározandó ismeretlenek a legkisebb középhibát mutassák.

X. Ebben a fejezetben Wolf kimutatja, hogy a kiegyenlítő számítás történetében állandó volt a törekvés arra, hogy a számítás egyszerűsítését azáltal ériék el, hogy a normális egyenleteket részekre bontják és ezeket a részeket egymásután oldják meg. Gyakori az olyan szétbontás, amelynél a második csoport kiegyenlítése után ismét az első csoportot kell számítani, és a számítás lépéseit ismételni kell.

Ezután ismerteti a különféle eljárásokat, amelyeket a normális egyenletek megosztásával elérendő számítási könnyebbségek céljából készítették.

Igy a C. F. Gauss-féle ú. n. fogás abban áll, hogy az első csoportban a szögfeltételi, a második csoportban az oldalfeltételi egyenleteket vonja be. Ezt követi a sinus feltételek átalakítása bizonyos köve-

telmények kielégítése mellett. Az eredményt többszörös közeledés után kapja meg.

Krüger eljárása a Gauss-féle meghatározás és a Boltz-féle megoldás között helyezkedik el. A második csoport valamennyi feltételi egyenletét átalakítja, ezek most mint szabad függvények szerepelnek, szemben az első csoport feltételeivel. A megoldást közvetlenül kapja meg, nincs szükség közelítésre.

További fejlődést jelent a Boltz-féle helyettesítő eljárás. Ez feltételezi, hogy két-, vagy több egymással határos részhálózat a Boltz-féle eljárással már külön-külön ki van egyenlítve. A részegyenleteket ú. n. helyettesítő egyenletekkel kapcsolja össze. A helyettesítő eljárás előnye az, hogy több száz feltételi egyenlet esetén is megfelelő kényelmes meghatározást ad.

Gruber eljárása hasonlóságot mutat Krovác eljárásához. Gruber megadja a közvetlen kapcsolatot a pótkorreláták és az együtthatók között.

K. Friedrich-féle ütköző hálózatos eljárás hasonló a Krüger-féle eljáráshoz. Míg azonban Krüger az első csoportban túlnyomórészt szög, és a második csoportban túlnyomóan oldalfeltételi egyenleteket szerepeltet, addig Friedrich az első csoportban a két független részhálózat, a második csoportban az ütköző hálózat feltételeit csoportosítja. Előnye eljárásának, hogy a második csoport normális egyenletei szimmetrikus felépítésűek, továbbá, hogy itt az ütköző hálózat következtében kevesebb a feltétel.

Schleiermacher eljárása csupán a Boltz-féle eljárás egy speciális esete. Amit Schleiermacher a normális egyenletek átalakításával elér, azt Boltz sokkal általánosabb érvennyel adja eljárásában.

Eggert nagy háromszögelési hálózatok kiegyenlítésében a két csoportra osztott eljárást alkalmazva, költött észleléseket és javításokat vezet be. Ezáltal az átalakított feltételi egyenleteket pótolni tudja és könnyebben megoldható normális egyenleteket állít elő.

Bessel az állomás-kiegyenlítést és a hálózat kiegyenlítést összekapcsolja eljárásában. Az első csoportban az állomás-kiegyenlítés feltételei szerepelnek, a másik csoportba a hálózat kiegyenlítés feltételeit vonja be. Az első csoportban a közvetett, a másodikban a közvetlen észlelések szerepelnek.

Eggert és Wernicke a közvetlen méréseket és az ismeretleneket összekapcsolva végezték el a kiegyenlítést két csoportban. A kiegyenlítés felépítése hasonló a Bessel-féle kiegyenlítéshez.

XI. Ha áttekintjük a kiegyenlítési eljárásokat, akkor látjuk, hogy egy csoportja közvetlen eredményeket ad (Krüger, Boltz, Friedrich stb.), a másik csoportja pedig csak közeledések után adja meg a végeredményt. (Gauss eljárása.)

De különbséget tehetünk az egységes és a csoportos kiegyenlítések alapján is. Az egységes eljárások az összes feltételi és normális egyenleteket egyszerre vonják be a kiegyenlítésbe, a csoportos kiegyenlítés szétbontja a feladatot a feltételi és normális egyenletek egyes csoportjára vonatkozólag. Itt eljárhatunk úgy,

1. hogy külön csoportosítjuk a szög és külön az oldalfeltételi egyenleteket (Gauss, Krüger, Boltz, Gerling),

2. hogy részekre bontjuk a hálózatot (Gauss, Krovác, Paschen, Friedrich). A szétbontás történhet úgy, hogy

a) vagy eredeti alakjukban szerepelnek az egyenletek (Gerling, Paschen),

b) vagy a feltételi egyenleteket alakítjuk át (Gauss, Krüger),

c) vagy a normális egyenleteket alakítjuk át (Schleiermacher, Krüger, Boltz, Krovác, Friedrich).

A közeledéssel történő megoldások egész sorát ismerjük, de azok rendszerint magukon hordják az önkény jellegét.

XII. Befejezésül újból utal Wolf arra, hogy a Boltz-féle kiegyenlítés az egymástól függő közvetlen észlelések kiegyenlítésében a középonti helyet foglalja el, mely az összes többi eljárásokkal rokonságban van és a matematikai tartalma közel áll Frobenius és Schur eljárásához. Végül utal E. Bodewieg alapvető munkájára.

Dr. Hönyi Ede.

2. A „Közép-Európai“ háromszöghálózat.

A bambergi Institut für Erdmessung három évi munkálkodás után közleménysorozatot indított meg. Az első füzetből *Karl Levasseur* cikke alapján ismertetjük a következőket:

350 éve alkalmazzák a háromszögelést a föld alakjának meghatározására. A mérések csillagászati megfigyeléssel kapcsolatosak. Az új optikai-elektromos téren alkalmazott hosszúság meghatározási eljárások esetleg egészen megváltoztatják a műveleteket, ám napjainkig még mindig csak a régebbi műszerek és eljárások tökéletesítésével hajtják végre a háromszögeléseket.

A tudományos célokon kívül mintegy 200 éve jelentkezett nagy területek térképezésének gyakorlati szükségessége. Ehhez azonban a meridiánok és parallelkörök irányában haladó háromszögelési láncolatok nem mutatkoztak elégségesnek, úgy, hogy a felveendő terület teljes egészében kellett hálózatokkal borítani. Az egyes felveendő területek nagyságát az államok határai szabták meg. A politikai határok a geodéziai munkálatok természetellenes tagozódását idézték elő és ezeknek egybekapcsolása nehézkes. Történtek mérések a napoleoni időkben Franciaországtól Ausztriáig, melyhez a délnémet államok csatlakozhattak, az osztrák-magyar geodéziai munkálatok az Adriától Oroszorszáig terjedő teret töltötték ki, a poroszok pedig a Rajnától a Balti tengerig háromszögeltek. Ez Ausztria, Oroszország és Poroszország között együttműködést eredményezett, s az Ozmán birodalom hanyatlásával a Balkánon az orosz befolyás geodéziai téren is érvényesült. Anglia és Franciaország mérései egybekapcsolódtak, Franciaország pedig Spanyolországon keresztül Észak-Afrikához is csatlakozott.

Azonban az államok közti kapcsolatok csak néhány szűk, fokmérés céljaira elégséges átmenetekből állottak és nem elegendők az egész állami területre kiterjedő mérések csatlakoztatására.

90 évvel ezelőtt hajtotta végre a belső oroszországi meridián ív meghatározására szolgáló fokméréseit az orosz *F. Struve von Tenner*-rel

együtt, mely az Északi Jeges-tengertől a Duna torkolatáig terjedt, méreteiben felülmúlva az eddigi fokméréseket.

Minden államnak önálló főháromszögelése van, melyek vagy láncolatok, vagy hálózatok, mértékegységüket túlnyomórészt csak egy alapon vonalból vezették le és a számítások egy központosan fekvő háromszögelési főalappontból indultak ki. A főalapponton szélesség- és hosszúságméréseket hajtottak végre, azonban függővonal eltérést nem minden esetben mértek, és a rendszer tájékozását ezekből az adatokból vezették le. Ennek következtében a határok mentén a hálózatok között hézagok keletkeztek, a csatlakozó pontok koordinátái a szomszédos rendszerekben néha több 100 méteres eltérést mutattak és ezek az eltérések még az 1:1 000 000 méretarányú nemzetközi világtérképen is érezhető hibát eredményeztek.

A hálózatok eltérése készítette 1861-ben *Johann Jakob Bayert*, hogy *Wilhelm Bessel*-lel egyetemben, porosz állami támogatás mellett, összhangba igyekezzék hozni a különböző hálózatokat, a megfelelő és szükséges csillagászati mérések végrehajtásával. Ausztria, Poroszország és Szászország képezték a magot, melyhez további 13 állam csatlakozott. 1864-ben *Bayer* lett az elnöke a közép-európai fokmérés új állandó bizottságának, melynek utasításai szerint dolgozott egy központi iroda s a feladatok megnövekedésével csatlakozott a munkához az új potsdami Geodéziai Intézet. *Bayer* és utódja, *Helmert* nevéhez kapcsolódik az európai hálózatok egységesítése. A munkálatok továbbfolytatását 1919-ben a Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió vette át, és *Georges Perrier* vezetése alatt a második világháborúig folytatta. 1945 óta a párisi központi iroda *Pierre Tardi* vezetése alatt áll.

A Nemzetközi Földmérés 80 éves fennállása alatt az európai államok mind tökéletesebben és alaposabban hajtották végre háromszögeléseiket, melynek következtében az államhatárokon jelentkező hézagok még zavaróbbak lettek. Helyenkénti összedolgozással át lehetett a hibákat hidalni, de gyökeres megoldást ez nem nyújt.

* * *

A közép-európai térségre kiterjedő hálózat az egyes államok önálló főhálózataiból tevődik össze, ezeknek egyesítése céljából rendelkezésre állanak az elsőrendű hálózatok szögmérései. A bőségesen rendelkezésre álló alapvonalmérések és csillagászati észlelések lehetővé teszik, hogy a főhálózat saját mértékegységében s tájékozásában az alapfelületen elegendő pontossággal rögzíttessék.

A Nemzetközi Földmérés által ajánlott tájékozó iránnyal bíró főháromszögelés meghatározása a legtöbb számba jöhető államban már nagy mértékben előrehaladt. Belgium, Dánia, Németország, Lettország, Hollandia, Ausztria és Csehszlovákia főhálózatukat lényegében már lezárták, Franciaországban, Litvániában, Lengyelországban és Romániában a rácsos kerethálózatok már elkészültek, a főhálózat Magyarországon most van készülöben, ez keleti részén csatlakozik a hajdani osztrák-magyar hálózathoz. A közép-európai hálózatot Belgium, Dánia, Franciaország, Románia és Svájc csak a szélén érintik.

Kisebbs államokban a hálózat túlnyomórészt egységesen épül fel, nagyobbakban oly részekre esik, melyek az egyes országrészeknek fe-

lelnek meg és egy állami főhálózattal kapcsolódnak egymáshoz. Mivel a Közép-Európai Hálózat szempontjából nemcsak az észlelési anyag, hanem a hálózat felépítése is fontos, azért az anyag feldolgozásánál ez utóbbit is figyelembe kell venni, továbbá az egyes hálózatok pontossági adatait. Ennek jellemzésére a Ferrero-féle középhibából levezetett súlyt használják, mely a középhiba négyzetének reciproka értéke. A felhasznált hálózatokban a súlyok 0,5-től 20-ig terjednek.

Hogy a közép-európai háromszöghálózat mértékének egységes voltát biztosítsák, az összes rendelkezésre álló főhálózati alapvonal-méréseket átvizsgálták. 1946-ig 59 alapvonal jöhetett szóba, melyekből 50-et bevontak az első kiegyenlítésbe, ezek közül 46 a végleges kiegyenlítésre is alkalmasnak mutatkozott. A mérések ideje 1804-től 1941-ig terjed, a legrövidebbek az 1,8 km-es königsbergi és 2,3 km-es lommeli, a leghosszabbak pedig a 18,7 km-es wieni, 19,0 km-es ensisheimi alapvonal. Az átlagos alapvonalhossz 7,6 km, a fejlesztett bázishossz pedig a 13,7 km-es kreutzburgi és a 74,3 km-es wohlau-i hossza között ingadozik. Az alapvonalmérésre vonatkozó anyag kritikai átnézését *Gigas* végezte *Strasser* főmunkatárs segítségével.

Az alapvonalak száma az egyes államok között a következőképpen oszlik meg: Belgium: 2, Dánia: 2, Németország: 18, Franciaország: 2, Lettország: 4, Litvánia: 4, Németalföld: 1, Ausztria: 4, Lengyelország: 16, Románia: 1, Svájc: 1, Csehszlovákia: 3, Magyarország: 1.

A Közép-európai Hálózat pontos tájékozása céljából és hogy a függővonal-eltérés hatása az azimutban lehetőleg kicsiny legyen, az összes Laplace-féle pontokon és azok környékén végzett csillagászati észleléseket bevonták a számításokba. Helmert nyomán Laplace-pontnak vették azokat, melyeken sarkmagasságmérést és hosszúságmérést végeztek és az azimutot legalább egy földi irányhoz bemérték. Ezeknek a szempontoknak figyelembe vételével számbajöhető 118 Laplace-pont közül 107-et lehet felhasználni. Az észlelések időpontjai 1821-től 1939-ig terjedő években vannak. A csillagászati anyag átnézését *Wolf* végezte. Az egyes államokban a következő számú Laplace-pontok kerültek feldolgozásra: Belgium: 2, Dánia: 1, Németország: 58, Franciaország: 1, Lettország: 10, Litvánia: 7, Németalföld: 4, Ausztria: 5, Lengyelország: 17, Svájc: 4, Csehszlovákia: 7, Magyarország: 2.

A Laplace-pontok nagy száma lehetővé tette, hogy a függővonal-eltéréseket is kiegyenlítsék. A kiegyenlítést eleinte *Ledersteger* elgondolása alapján akarták végrehajtani, de később a kiegyenlítést *Wolf* a függővonal-eltérések összetevőinek egységes meghatározása segítségével végezte el.

A tájékozásra már felhasznált 118 Laplace ponton kívül még 72 ponton mért függővonal-elhajlás is rendelkezésre állott, mely pontokon nem volt teljes földrajzi helymeghatározás. Ilyen pont volt Németországban: 42, Németalföldön: 3, Ausztriában: 9, Lengyelországban: 3, Csehszlovákiában: 9 és Magyarországon: 6.

A *Günter Mulert* főmunkatárs által összeállított anyag több mint 1500 füzetet tett ki, itt feltüntették az észlelés időpontját, az észlelőt és a használt műszert, a pont és műszerállás magasságát, a mérési módszert, az állomáskiegyenlítés eredményeit és középhibáit, a mérési körülményeket és a pont leírását. Az állomásokat gondosan központosították,

ahol a különböző időben végrehajtott észlelések a hiányok következtében nem voltak közösen központosíthatók, ott a pontot külön kezelték.

Az alapvonalak eredményfüzeteiben feltüntették a hibaadatokat, a mérés körülményeit és a mérőszerv komparálási eredményeit. A bázisfejlesztő hálózatok eredményfüzetei minden, a kiegyenlítés szempontjából szükséges adatot tartalmaznak, a hibaadatokkal egyetemben.

A csillagászati észlelések eredményfüzetei az eredeti mérési eredményeken kívül az összefoglalást, régebbi kiegyenlítések, főleg a hosszúságkülönbségek eredményeit is feltüntetik. Ezeknél a geodéziai munkáktól független csillagászati mérések központosításait különös gondal végezték el.

* * *

A Nemzetközi Földmérés megalakulása előtt mért nagykiterjedésű háromszögláncolatok több állam együttműködésének eredményei voltak. Ilyen a *Struve—Tenner*-féle jegestengeri meridián Greenwich-től keletre $25^{\circ}20'$ -re, és a Helmer névéhez kapcsolódó hosszúsági fokmérés az 52° északi szélességen. Ilyen továbbá az Oroszország által már 1847-ben megkezdett és jóformán csak most befejezett fokmérés a 48° északi szélességen az Atlanti-óceán partjától a Káspi-tengerig.

Az Európa szívében mért bécsi és a Grossenhain—Kremsmünster—Pola meridiánok láncolatai a magyar-osztrák főláncolat részét képezik. A Nemzetközi Geodéziai Szövetség új jegestengeri meridiánja a Balti térségben eltér a *Struve—Tenner*-félétől és áthalad Lettországon, Lengyelországon, Csehszlovákia hajdani keleti részén, Románián, Jugoszlávián és Görögországon egész Krétáig. A Földközi-tengeren keresztül Tobruk felé menő áthaladási szakasz kérdése nincs még véglegesen megoldva.

A fokmérési munkálatok mellett Közép-Európában Németország és Ausztria-Magyarország országos felmérései nagy hálózatokat létesítettek. Ezek azonban a kevésszámú alapvonal és csillagászati meghatározások következtében méteregység és tájékozási hibával terheltek. Fejlettebb módszerekkel készült a lengyel háromszögelés, de még ez sem mentes teljesen ezektől a hibáktól.

1925-ben a potsdami Geodéziai Intézet megkezdte egy tudományos célokra szolgáló német hálózat szigorú kiegyenlítését, mely hála Boltz úttörő munkásságának, 673 feltételi egyenlet pontos megoldását tette lehetővé. Azonban Boltz 1946-ban bekövetkezett halála miatt a nagy munka befejezetlen maradt. A fejlesztett bázisokat bevonták a kiegyenlítésbe, de a főláncolat tájékozása bizonytalan. Különben is, jóllehet a német hálózatot pontosan kiegyenlítették, még sem éri el egy korszerű nagy hálózatkiegyenlítés tökéletességét.

Egy feladat szigorú megoldása, mely minden természetes követelményt matematikai valószínűséggel, megalkuvás nélkül megold, nem vihető gyakorlatilag mindig keresztül, vagyis úgy, hogy az összes észlelési eredményekhez a lehető legjobban simuljon. Vagy még nem találták meg ezt a megoldást, vagy pedig annyira hosszadalmas és nehézkes, hogy alkalmazása nem egyesíthető a tudomány általános követelményeivel. Ez esetben jobb egy közelítő megoldást keresni, mely a valósághoz jobban illeszkedik, mint egy szigorú megoldást választani,

mely nem öleli fel az összes méréseket. Hisz ez esetben a pontosság az eredmények kiválogatásának a függvénye.

Hatalmas problémája volt a Coast and Geodetic Survey-nek az Amerikai Egyesült-Államok nyugati részében lévő nagy területű hálózat kiegyenlítése, mivel ezt a régi, függővonalettérés nélkülinek vett Meade's Ranch (Kansas) háromszögelési főalapponthez és a már kész keleti részhez csatlakoztatták. A számításokat a Bowie-féle közelítő eljárással hajtották végre.

A háború folyamán a német hadsereg felmérése tervbe vette egyes európai háromszöghálózat megalkotását, melynek magját a német főhálózat képezné és a szomszédos államok ehhez csatlakoznak. Ez magába foglalta volna az európai és afrikai német megszállás alatt álló területeket.

A Szovjet-Unió nagykiterjedésű területeinek európai részén a kiegyenlítést *Krassovskij* és *Urmajev* végezték a Bessel-ellipszoidon és csatlakoztak a Helmert-féle asztronómiai-geodéziai hálózat kiegyenlítéséhez a Bowie-féle módszer alkalmazásával. A munka lényege hosszú geodéziai vonalból álló poligon kiegyenlítése, melynél a csillagászati méréseket is figyelembe vették.

Ezekről a munkálatokról függetlenül jött létre 1924-ben a *Bonsdorff* vezetése alatt álló Balti Geodéziai Bizottság Helsinkiben, melyben Dánia, Danzig, Németország, Esztország, Finnország, Lettország, Litvánia, Lengyelország, Svédország és a Szovjet-Unió vettek részt. A bizottság a kerekén 3000 km hosszú Keleti-tengeri Gyűrű megtervezését, megalkotását és kiegyenlítését tűzte ki feladatul, mely 9 geodéziai vonalból álló poligont alkotott, a poligon súlypontja Karlskrona és Memel között félúton van. A poligon részei, tekintve, hogy már meglévő hálózatokból és láncolatokból alkották, nem egységesek. A számításokhoz 18 hibátlan alapvonalat használtak fel. A kiegyenlítést 1937-ben kezdték, a déli finn rész *Ölander* vezette munkálatai rövidesen kész lesznek. A Balti Geodéziai Bizottság a Hayford-ellipszoidot használja. A Nemzetközi Geodéziai Egyesület megbízásából *Eggert* tervezetet dolgozott ki egy későbbi Európa-hálózat kiegyenlítésére. Jóllehet a kiegyenlítés részekre tagozódik, mégis a szigorúan pontos eredményeket szolgáltatja.

1945 májusában *Gigas* az Amerikai Egyesült-Államok hadseregének felszólításával azt a megbízást kapta, hogy a U. S. Coast and Geodetic Survey-vel karöltve készítse el *Mr. Hough*-val egyetemben a Közép-Európai Hálózat új kiegyenlítéstervezetét. A munkálatok kisszámú munkatárs részvételével Bambergben folynak és a kiegyenlítésnél a Bowie-módszert alkalmazzák.

Jóllehet az európai hálózat kiegyenlítésének gondolatát *Helmert* már 1880-ban felvetette, a feladat rendkívül lassan jutott közelebb a megvalósuláshoz. Az amerikai-angol és francia Felmérések képviselőivel való megbeszélés alapján az U. S. Army Map Service Washingtonban csakhamar két hálózati tervezetet dolgozott ki, melyek az U. S. Coast and Geodetic Survey jóváhagyása után a Középeurópai Hálózat kiegyenlítésének alapját képezik.

A Középeurópai Hálózat célszerűen terekre tagozódik, a határok északon az Északi- és Keleti-tenger, keleten Lettország és Lengyelország keleti határa, délen a 48° szélességben lévő paralellkör, nyugaton

pedig a Rajna és az Északi-tenger. Ez felöleli az 1937-es Németországot, Litvániát, Lengyelországot és Csehszlovákiát, Németalföld nagyrészt, Ausztriát és Lettországot, továbbá Belgium, Dánia, Franciaország, Svájc és Magyarország határos területeit. A rendszer súlypontja Boroszló környékén fekszik, és mivel alakja következtében minden irányban fejleszthető, alkalmas magját képezi egy Európa-hálózatnak.

* * *

A Középeurópai Hálózat közel 1,100.000 km² területet borít, keken 4500 km kerülettel. Nyugaton és közepén nagy háromszöghálózatok borítják, keleten nagy üres területek vannak, melyeket a litván és lengyel főhálózat tölt ki, de ezek még nincsenek kész. A szigorú kiegyenlítéshez 3350 feltételi egyenlet szükséges, melyek közül 1000 nem lineáris. Ilyen roppant kiegyenlítési feladatot még nagyszámú, jól képzett és gyakorlott munkaerővel s korszerű számítási segédeszközökkel sem lehet rövid idő alatt megoldani. A nyugatamerikai kiegyenlítésbe vont terület kerülete 8500 km, a Keleti-tengeri Gyűrű hossza 3000 km.

A kiegyenlítésbe vont komplexus 17, a kerületen fekvő kettősláncolatból, 18 egyszerű láncolatból és 23 csomóponti hálózatból áll. A 23 csomóponti hálózat és a 35 összekötő hálózat 13 poligont alkot. A csomóponti hálózatok közül 22-ben legalább egy alapvonal és egy Laplace-azimut áll rendelkezésre. A többi alapvonal és azimut az összekötő láncolatokban fekszik. Az összekötő láncolatok hossza 95 és 378 km között változik s a csomóponti láncolatokkal egyetemben az összhosszúság 9300 km. A hálózat 3286 állomási kiegyenlítéssel bíró irányból áll, 59 alapvonalból, 118 Laplace-pontból és továbbá 72 függővonal eltérési pontból. Ezek közül a számításba 3283 irányt, 50 alapvonalat, 107 Laplace-pontot és ezeket is beleértve 183 függővonal-eltérési pontot vontak be, 3 irányt, 9 alapvonalat, 11 Laplace-pontot és 7 függővonal-eltérési pontot, az adatokat terhelő hibák miatt nem lehet felhasználni.

A hálózatnak a Keleti-tengeri Gyűrűvel 101 állomása és 448 iránya közös. Három poligontöréspont is a Középeurópai Hálózatba esik. A feltételi egyenletek megoszlása a következő:

- 921 háromszög szögfeltételi egyenlet,
- 26 diagonális oldalfeltételi egyenlet,
- 131 centrálisrendszerű oldalfeltételi egyenlet,
- 32 csatlakozó szögfeltételi egyenlet,
- 32 csatlakozó oldalfeltételi egyenlet,
- 53 alapvonal oldalfeltételi egyenlet,
- 67 azimut szögfeltételi egyenlet és
- 70 szélesség-hosszúsági feltételi egyenlet,

vagyis összesen 1332 feltételi egyenlet.

A hálózatnak 714 pontja van. 905 észlelt háromszögből levezetett átlagos háromszögzáróhiba 0,515'', a Ferrero-féle középhiba értéke 0,348''.

441 háromszög 0,5'' alatt zár,

268 0,5'' és 1,0'' között,

171 1,0'' és 2,0'' között, és csak

25 háromszögben van 2,0'' feletti záróhiba, melyek legnagyobb értéke 3,26''.

* * *

Kiegyenlítési felületül a Hayford-ellipszoid szolgál, melynek adatai a Helmert-féle középhibákkal:

a nagy féltengely $6\,378\,388 \pm 53$ nemzetközi méter,
a lapultsága $1: (297,000 \pm 1,194)$.

A Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió 1924. évben tartott madridi ülésén ezt ajánlotta nemzetközi ellipszoidnak, mint amely jelenleg legjobban megközelíti a Föld eszmei alakját.

A földi szferoid lapultságát az előbbi értékektől függetlenül, nehézségerő mérésekből *Helmert* is levezette a potsdami Geodéziai Intézetben, az érték $1:296,7$ nagyságúnak adódott, mely igazolja a Hayford-ellipszoid geometriai alakját.

A finn Geodéziai Intézetben *Heiskanen* foglalkozott a földi ellipszoid méreteivel, az európai fokmérések új feldolgozása alapján. Ezen számítások szerint a fél nagytenyely $6\,378\,397 \pm 72$ m, mely a Hayford-Helmert értéktől csupán 9 m eltérést mutat, tehát az amerikai ellipszoid nagyságát tekintve is megfelelő. 1911 óta a csillagászati évkönyvek is a Hayford-ellipszoidot veszik alapul. Közép-Ázsiában való alkalmazása ellen *Krasofskij* tett észrevételt.

A legtöbb középeurópai államban eddig használt Bessel-ellipszoid nagytenyelyét $6\,377\,397,15500$ méternek vették. A Közép-Európai Hálózattal kapcsolatos számítások során *Ledersteger* újra átszámolta a referencia-ellipszoid adatait. Ezen számítások szerint a fél nagytenyely legvalószínűbb értéke: $6\,377\,788 \pm 42$ nemzetközi méter, a lapultsága pedig $1: (296,76 \pm 1,14)$, mely érték a Hayford-ellipszoid lapultságát újlag igazolja.

Ledersteger szerint a nagytenyely hossza Észak-Európa számára kicsiny, a Hayford ellipszoidé viszont Európa számára nagy.

A hálózat kiegyenlítését, a normális egyenletrendszer megoldását túlnyomórészt *Boltz* módszerével hajtották végre.

A kiegyenlítést a 22 csomóponti hálózat kiegyenlítésével kezdték. A 35 összekötő láncolat feltételi egyenleteit *Boltz—Jenne* módszere szerint a következő öt csoportra tagozták:

5. csoport: A háromszögek szögfeltételi egyenletei.
4. csoport: A digonális és centrális oldalfeltételi egyenletek.
3. csoport: A csatlakozó szög- és oldalfeltételi egyenletek.
2. csoport: Azimut és alapvonal feltételi egyenletek.
1. csoport: A hosszúsági és szélességi feltételi egyenletek.

Kiindulási értékeként a csomópontok helymeghatározó adatai és Laplace azimutjai szolgáltak, melyeket az előzőleg végrehajtott függővonaléltérés-kiegyenlítésekből nyertek.

Kürti Vilmos.

Felelős kiadó: *Oltay Károly.*

Budapest, XI., Műegyetem.

A
Stephaneum nyomda és könyvkiadó rt.

kiadásában megjelent
és minden könyvkereskedés útján beszerezhető:

OLTAY KÁROLY

műegyetemi nyilvános r. tanár

GEODÉZIA

című műve III. kötetének 3. javított és bővített kiadása.
A mű a mérnöki gyakorlat szempontjából nagyon fontos
vízszintes (helyszinrajzi) mérésekkel foglalkozik és fontosabb fejezetei az alábbiak:

Síkgeometriai alapfogalmak és számítások. A vízszintes mérés alapelve. Háromszögelés. Pontkapcsolások. Sokszögelés. Részletpontok meghatározása. Derékszögű és poláris koordináta mérés. Előmetszés. Tahimétria. Redukáló tahiméterek és tahigrafométria. Mérőasztal felvétel. Fotogrammétria. Kisebb felvételek (telek stb.). Közelítő felvételek. Földosztás, birtokrendezések, határszabályozás. Kitérőzések a vízszintes síkban.

